ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
86ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
7 Νοεμβρίου 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-5)^2-(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2025}-\frac{43}{21} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=((10-5)^2+(-2)^3-18)^{2024}-\frac{63}{31},$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-5)^2-(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2025}-\frac{43}{21}=\left(\frac{25-9}{16}\right)^{2025}+\frac{43}{21}=1^{2025}-\frac{43}{21}$$

$$=1-\frac{43}{21}=-\frac{22}{21}.$$

$$\mathrm{B}=((10-5)^2+(-2)^3-18)^{2024}-\frac{63}{31}=(5^2-8-18)^{2024}-\frac{63}{31}$$

$$=(25-8-18)^{2024}-\frac{63}{31}=(-1)^{2024}-\frac{63}{31}=1-\frac{63}{31}=-\frac{32}{31}.$$

Επειδή

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=-\frac{22}{21}-\left(-\frac{32}{31}\right)=-\frac{22}{21}+\frac{32}{31}=-\frac{22\cdot 31}{21\cdot 31}+\frac{32\cdot 21}{21\cdot 31}$$

$$=\frac{-682+672}{651}=-\frac{10}{651}<0 \Rightarrow \mathrm{A}<\mathrm{B}.$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α,β, με $\alpha\le\beta$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη 15 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 60. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές των α,β.

Λύση

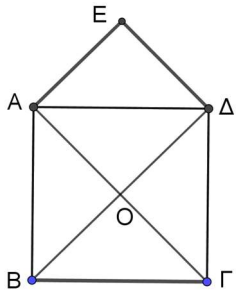
Οι δυνατές τιμές του α είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\alpha \in \{15, 30, 45, 60\}$. Ομοίως, οι δυνατές τιμές του β είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\beta \in \{15, 30, 45, 60\}$.
Έστω $\alpha = 15$. Τότε η μόνη δυνατή τιμή για το β είναι το 60. Αν ήταν $\beta = 15$ ή 30 ή 45, τότε θα είχαμε $ΕΚΠ\{\alpha, \beta\} = 15$ ή 30 ή 45, αντίστοιχα, που είναι διαφορετικά από το 60.
Έστω $\alpha = 30$. Τότε δεν υπάρχει δυνατή τιμή για το $\beta \geq 30$.
Πράγματι, αν ήταν $\beta = 30$, τότε θα είχαμε $ΜΚΔ\{\alpha, \beta\} = ΜΚΔ\{30,30\} = 30 \neq 15$, αν ήταν $\beta = 45$, τότε θα είχαμε $ΕΚΠ\{\alpha, \beta\} = ΕΚΠ\{30, 45\} = 90 \neq 60$, ενώ αν ήταν $\beta = 60$, τότε θα είχαμε$ΜΚΔ\{\alpha, \beta\} = ΜΚΔ\{30, 60\} = 30 \neq 15$.
Έστω $\alpha = 60$. Επειδή πρέπει $\beta \geq \alpha$, έπεται ότι $\beta = 60$ οπότε

$$ΜΚΔ\{\alpha, \beta\} = ΜΚΔ\{60, 60\} = 60 \neq 15.$$

Άρα οι μόνες δυνατές τιμές είναι: $\alpha = 15, \beta = 60$.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΑΕ είναι παράλληλα. Επίσης, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΔΕ είναι παράλληλα.
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΔΕ είναι τετράγωνο.



Λύση

Το τετράπλευρο ΑΟΔΖ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$\text{ΑΟ} = \text{ΕΔ} \text{ και } \text{ΑΕ} = \text{ΟΔ}. \qquad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, οι διαγώνιες του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$\text{ΑΟ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \frac{\text{ΒΔ}}{2} = \text{ΟΔ}. \qquad (2)$$

$$\text{Α}\widehat{\text{Ο}}\text{Δ} = 90^0 \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι: $\text{ΑΟ} = \text{ΟΔ} = \text{ΔΕ} = \text{ΕΑ}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και μία γωνία του ορθή, , οπότε είναι τετράγωνο.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(\left(-\frac{18}{3}\right)^{2}+\frac{(-2)^{2}}{3^{2}}\right)\cdot\frac{1}{78}-\frac{2}{3},$$

$$\mathrm{B}=\frac{(-18)^{8}}{3^{8}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-8}-\frac{25}{117}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\left(-\frac{18}{3}\right)^{2}+\frac{(-2)^{2}}{3^{2}}\right)\cdot\frac{1}{78}-\frac{2}{3}$$

$$=\left((-6)^{2}+\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{78}-\frac{2}{3}=\left(36+\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{78}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{328}{9}\cdot\frac{1}{78}-\frac{2}{3}=\frac{164}{9}\cdot\frac{1}{39}-\frac{2}{3}=\frac{164}{351}-\frac{2}{3}=\frac{164}{351}-\frac{234}{351}=-\frac{70}{351}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{(-18)^{8}}{3^{8}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-8}-\frac{25}{117}=\left(\frac{-18}{3}\right)^{8}-(-6)^{8}-\frac{25}{117}$$

$$(-6)^{8}-(-6)^{8}-\frac{25}{117}=-\frac{25}{117}=-\frac{75}{351}.$$

Επειδή είναι:

$$-\frac{75}{351}<-\frac{70}{351},\qquad \text{έπεται ότι}\quad \frac{75}{351}>\frac{70}{351}\Rightarrow\quad \mathrm{A}>\mathrm{B}.$$

Διαφορετικά θεωρούμε τη διαφορά Α – Β:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=-\frac{70}{351}-\left(-\frac{25}{117}\right)=\frac{25}{117}-\frac{70}{351}=\frac{75-70}{351}=\frac{5}{351}>0\Rightarrow \mathrm{A}>\mathrm{B}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί

$$A=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma, B=\overline{\beta\gamma}=10\beta+\gamma, \Gamma=\overline{\alpha\beta}=10\alpha+\beta,\qquad \text{με } \alpha,\beta\neq 0.$$

Αν ο αριθμός A είναι πολλαπλάσιο του 3, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του A για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$A=B+8\Gamma.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$100\alpha+10\beta+\gamma=10\beta+\gamma+8(10\alpha+\beta)\Leftrightarrow 100\alpha=80\alpha+8\beta$$

$$\Leftrightarrow 20\alpha=8\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{20\alpha}{8}\Leftrightarrow\beta=\frac{5\alpha}{2}.$$

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου $\alpha \neq 0$ είναι τα πολλαπλάσια του 2, δηλαδή τα ψηφία 2, 4, 6, 8. Τότε η τιμή του β που προκύπτει είναι 5, 10, 15, 20, αντίστοιχα, από τις οποίες δεκτή είναι μόνον η τιμή $\beta = 5$.
Επομένως, έχουμε:

$$A = \overline{25\gamma}, \text{όπου } \gamma \text{ ψηφίο με } 0 \leq \gamma \leq 9.$$

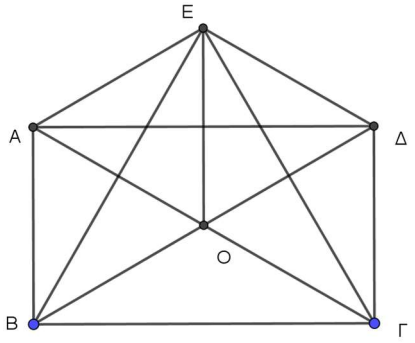
Το ψηφίο γ πρέπει να επιλεγεί έτσι, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 3. Επομένως, αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του A να διαιρείται με το 3, οπότε οι δυνατές τιμές του γ είναι 2, 5 και 8, οπότε τελικά έχουμε:

$$A = 252 \text{ ή } A = 255 \text{ ή } A = 258.$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ευθεία ΑΕ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΒΔ και η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

1. Το τετράπλευρο ΑΟΔΕ είναι ρόμβος.
2. ΕΒ = ΕΓ.



Λύση

1. Το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$\text{ΑΟ} = \text{ΕΔ} \text{ και } \text{ΑΕ} = \text{ΟΔ}. \qquad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$\text{ΑΟ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \frac{\text{ΒΔ}}{2} = \text{ΟΔ}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $\text{ΑΟ} = \text{ΟΔ} = \text{ΔΕ} = \text{ΕΑ}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

2. Επειδή $\text{ΕΑ} = \text{ΕΔ}$ και $\text{ΟΑ} = \text{ΟΔ}$, έπεται ότι η ευθεία ΕΟ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, οπότε θα είναι και άξονας συμμετρίας του. Τα σημεία Β και Γ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα ΕΟ, οπότε και τα τμήματα ΕΒ και ΕΓ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα ΕΟ. Άρα είναι ίσα.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους Α οι οποίοι είναι 2025 φορές μεγαλύτεροι από το τελευταίο ψηφίο τους.

Λύση

Έστω x το τελευταίο ψηφίο του Α. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathrm{A} = M + x, \text{όπου } M = 10B = \text{πολλαπλάσιο του } 10.$$

Αφού ο A είναι 2025 φορές το τελευταίο του ψηφίο, θα ισχύει:

$$10B + x = 2025x \Leftrightarrow 2024x = 10B.$$

Για να είναι πολλαπλάσιο του 10 το αριστερό μέλος, πρέπει το ψηφίο x να είναι το 0 ή το 5. Όμως ο x δεν μπορεί να είναι 0, γιατί τότε θα είχαμε $\mathrm{A} = 0$.
Άρα πρέπει να ισούται με 5 και ο μοναδικός θετικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα είναι ο $\mathbf{2024 \cdot 5 = 10125}$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα:

$$4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 + 18xy - 4x - 6y + 10 = 0, ,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 8x^3 + 27y^3.$$

Λύση

Η παράσταση Α μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\mathrm{A} = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x+3y)^3 - 3\cdot 2x\cdot 3y(2x+3y) \Rightarrow$$
$$\mathrm{A} = (2x+3y)^3 - 18xy(2x+3y) \qquad (1)$$

Επομένως, θα προσπαθήσουμε από τη δεδομένη ισότητα να εμφανίσουμε τις παραστάσεις $2x + 3y$ και xy.
Η δεδομένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$(2x)^2 + (3y)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + 6xy + x^2y^2 - 2(2x+3y) + 10 = 0$$
$$(2x+3y)^2 - 2(2x+3y) + 1 + x^2y^2 + 6xy + 9 = 0$$
$$(2x+3y-1)^2 + (xy+3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x+3y = 1 \ (2) \qquad \text{και} \qquad xy = -3 \ \ (3)$$

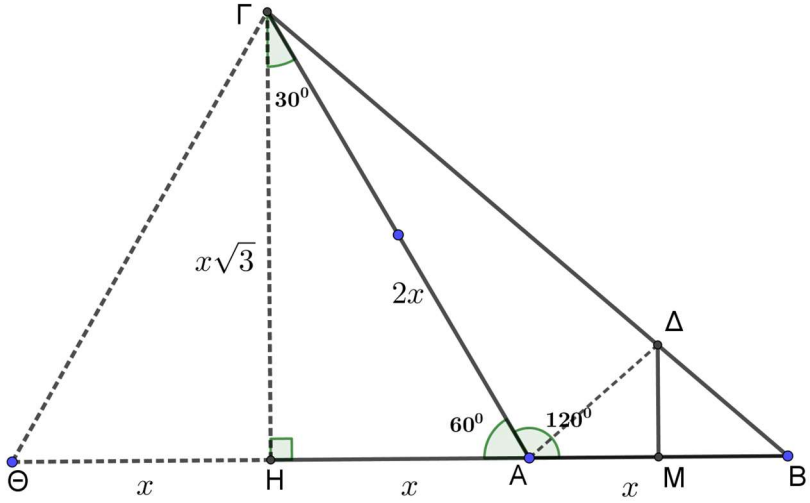
Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A} = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x+3y)^3 - 3\cdot 2x\cdot 3y(2x+3y)$$
$$\Rightarrow A = 1^3 - 18\cdot(-3)\cdot 1 = 55.$$

Πρόβλημα 3

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\hat{A} = 120^0$ και $\text{ΑΓ} = 2 \cdot \text{ΑΒ}$. Αν η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, να βρεθεί ο λόγος $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}}$.

Λύση



Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το μέρος του Α και φέρουμε από την κορυφή Γ κάθετη προς την ευθεία ΑΒ που την τέμνει, έστω στο Η.

Επειδή $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = 120^0$, έπεται ότι: $\Gamma\hat{\text{Α}}\text{Η} = 60^0$ και $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Η} = 30^0$. Αν Θ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΓΗ, τότε το τρίγωνο ΑΓΘ είναι ισόπλευρο. Αν $\text{ΑΒ} = x$, τότε $\text{ΑΓ} = 2x$ και $\text{ΑΗ} = \text{ΗΘ} = x$.

Επειδή η ευθεία ΜΔ, όπου Μ μέσο της πλευράς ΑΒ, είναι μεσοκάθετη της πλευρά ΑΒ έπεται ότι:

$$\text{ΑΔ} = \text{ΔΒ} \text{ και } \text{ΑΜ} = \text{ΒΜ} = \frac{x}{2}.$$

Επειδή $\Delta\text{Μ} \perp \text{ΑΒ}$ και $\Gamma\text{Η} \perp \text{ΑΒ}$, έπεται ότι $\Delta\text{Μ} \parallel \Gamma\text{Η}$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή, έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΗ}} = \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΑ} + \text{ΑΗ}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} + x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

(2ος τρόπος)

Έστω Κ σημείο στην προέκταση της ΒΑ προς το Α τέτοιο ώστε $\Gamma\text{Κ} \perp \text{ΒΑ}$, και έστω Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. Τότε η ΚΜ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΓΜΑ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε είναι $\text{ΚΜ} = \text{ΜΑ}$. Αφού $\text{Κ}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = 60^\circ$, το ισοσκελές τρίγωνο ΚΜΑ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$\text{ΚΑ} = \text{ΜΑ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \text{ΑΒ},$$

δηλαδή το Α είναι το μέσο του ΚΒ. Αν Ν είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΒΚΓ, τότε θα είναι $\text{ΝΚ} = \text{ΝΒ}$.

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα ΚΝΒ, ΑΔΒ είναι όμοια, αφού έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, και άρα:

$$\frac{\text{ΝΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΑΒ}} = 1,$$

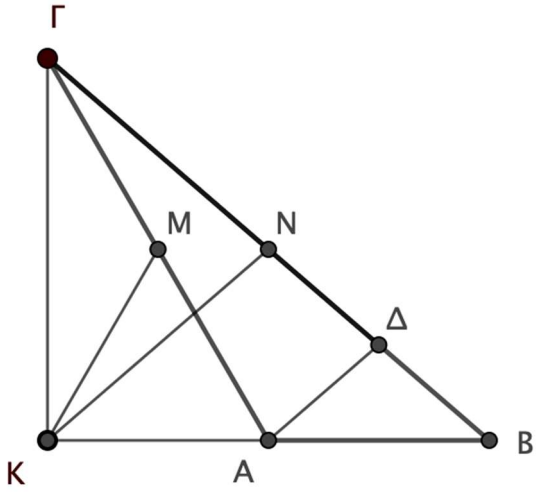
δηλαδή $\text{ΝΔ} = \text{ΔΒ} = \text{ΑΔ}$.

Άρα έχουμε

$$\text{ΓΔ} = \text{ΓΝ} + \text{ΝΔ} = \text{ΝΒ} + \text{ΝΔ}$$

$$= 2 \cdot \text{ΑΔ} + \text{ΑΔ} = 3 \cdot \text{ΑΔ}.$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με $1/3$.



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Αν οι a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η εξίσωση

$$3x^2 - 2(2a + b)x + 2a^2 + 2ab + b^2 - 1 = 0$$

με άγνωστο το x έχει πραγματικές λύσεις, να αποδείξετε ότι:

$(\mathbf{1})$. $a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2}$ και $(\mathbf{2})$. $a + b \leq \sqrt{2}$.

Λύση.

(1) Αφού η δεδομένη εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, η διακρίνουσά της θα είναι μη αρνητική, δηλαδή

$$\Delta = 4[(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$3 - 2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2}$$

(2) Ισχύει ότι:

$$a^2 + b^2 + ab \geq 2ab + ab = 3ab,$$

οπότε θα έχουμε:

$$3ab \leq \frac{3}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες ανισότητες και το ότι $a, b > 0$, έχουμε:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2} \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ < ΒΓ, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ να έχουν ίσα εμβαδά. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΕ} \cdot \text{ΑΔ}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

Λύση

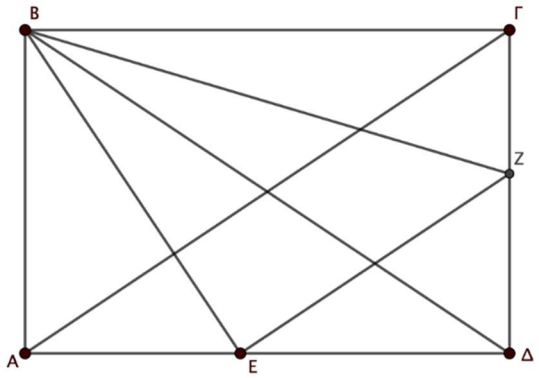
Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ έχουν ίσα εμβαδά, ισχύει

$$\frac{1}{2}\cdot \text{ΒΑ}\cdot \text{ΑΕ}=\frac{1}{2}\cdot \text{ΒΓ}\cdot \text{ΓΖ},$$

δηλ. $\text{ΒΑ}\cdot \text{ΑΕ}=\text{ΒΓ}\cdot \text{ΓΖ}$, ή ισοδύναμα,

$$\Delta\Gamma\cdot \text{ΑΕ}=\Delta\text{Α}\cdot \text{ΓΖ}$$

αφού $\text{ΒΑ}=\Delta\Gamma$ και $\text{ΒΓ}=\Delta\text{Α}$.
Τότε έχουμε:



$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\text{Α}}=\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΑΕ}}=\frac{\Delta\Gamma-\text{ΓΖ}}{\Delta\text{Α}-\text{ΑΕ}}=\frac{\Delta\text{Ζ}}{\Delta\text{Ε}}.$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και ΔΕΖ έχουν την ορθή γωνία κοινή και ίσους τους λόγους των καθέτων πλευρών τους, οπότε θα είναι $\text{ΕΖ}\parallel\text{ΑΓ}$ και άρα $\text{Α}\hat{\Gamma}\Delta=\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\Delta$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ΑΓ και ΖΕ με τέμνουσα την ΓΖ.

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΑΔΓ είναι όμοια, αφού έχουν

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΕ}}=\frac{\Delta\text{Α}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\Delta\Gamma}\ \text{και}\ \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ε}=\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma=90^{o}.$$

Επομένως θα έχουν

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}=\text{Α}\hat{\Gamma}\Delta=\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\Delta,$$

οπότε θα είναι:

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}=\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\Delta=\text{Ζ}\hat{\Delta}\text{Ε}-\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\Delta=90^{\text{o}}-\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\Delta.$$

Άρα είναι $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}+\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\Delta=90^{\text{o}}$, οπότε $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ}=90^{\text{o}}$.

Διαφορετικά, μπορούμε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και ΔΕΖ, με χρήση τριγωνομετρίας, να έχουμε

$$\text{εφ}\ \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\text{Α}}=\frac{\Delta\text{Ζ}}{\Delta\text{Ε}}=\text{εφ}\ \Delta\hat{\text{Ε}}\text{Ζ},$$

οπότε $\Delta\hat{\text{Α}}\Gamma=\Delta\hat{\text{Ε}}\text{Ζ}$ και άρα για τις συμπληρωματικές τους είναι $\text{Α}\hat{\Gamma}\Delta=\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\Delta$.
Αφού $\text{ΑΒ}^2=\text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΔ}$, στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΖ είναι

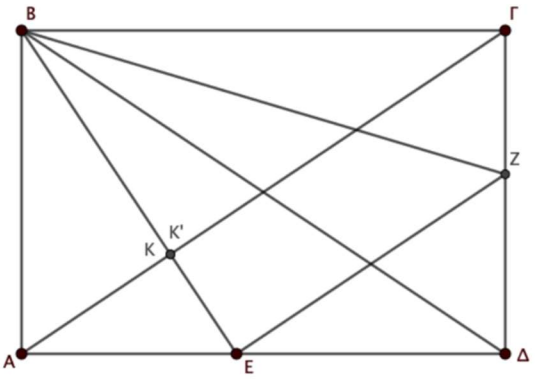
$$\text{εφ}\ \text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΕ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\Delta\text{Α}}{\Delta\Gamma}=\frac{\Delta\text{Ε}}{\Delta\text{Ζ}}=\text{εφ}\ \text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\Delta,$$

οπότε

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}=\ \text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\Delta=\text{Ζ}\hat{\Delta}\text{Ε}-\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\Delta=90^{\circ}-\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\Delta.$$

Άρα $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}+\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\Delta=90^{\circ}$, οπότε $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ}=90^{\circ}$όπως θέλαμε.

(**2ος τρόπος**) Έστω σημείο Κ στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΕΚ ⊥ ΑΓ. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΕ, ΑΔΓ είναι όμοια, αφού έχουν κοινή την οξεία γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$. Έτσι,



$$\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}},$$

και άρα:

$$\text{ΑΚ} \cdot \text{ΑΓ} = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΕ} = \text{ΑΒ}^2.$$

Έστω σημείο Κ′ στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΒΚ′ ⊥ ΑΓ. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚ′Β και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε

$$\text{ΑΚ}' \cdot \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΚ} \cdot \text{ΑΓ}.$$

Άρα τα σημεία Κ, Κ′ ταυτίζονται, και η ευθεία ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ στο Κ.

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ έχουν το ίδιο εμβαδό, ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ΒΑ} \cdot \text{ΑΕ} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \Gamma\text{Ζ},$$

δηλ. $\text{ΒΑ} \cdot \text{ΑΕ} = \text{ΒΓ} \cdot \Gamma\text{Ζ}$, ή ισοδύναμα,

$$\Delta\Gamma \cdot \text{ΑΕ} = \Delta\text{Α} \cdot \Gamma\text{Ζ}$$

αφού $\text{ΒΑ} = \Delta\Gamma$ και $\text{ΒΓ} = \Delta\text{Α}$. Τότε

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\text{Α}} = \frac{\Gamma\text{Ζ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma\text{Ζ}}{\Delta\text{Α} - \text{ΑΕ}} = \frac{\Delta\text{Ζ}}{\Delta\text{Ε}}.$$

που σημαίνει ότι ΕΖ||ΑΓ. Συνεπώς, ΒΕ ⊥ ΕΖ, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος μοίρασε διαδοχικά 150 μπίλιες σε 10 κουτιά $K_1, K_2, \dots, K_{10}$, με αυτή τη σειρά, στα οποία έβαλε $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ μπίλιες, αντίστοιχα, όπου $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ θετικοί ακέραιοι. Ξεκινώντας να βάζει μπίλιες από το κουτί K_1, σε κάθε επόμενο κουτί έβαζε περισσότερες μπίλιες από το προηγούμενο. Αν ο αριθμός από μπίλιες που έβαλε στο πρώτο κουτί είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μισό του αριθμού από μπίλιες που έβαλε στο δέκατο κουτί, να βρεθεί πόσες μπίλιες έβαλε στο έκτο κουτί.

Λύση (1ος τρόπος)

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, έχουμε:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}, \quad a_1 + \cdots + a_{10} = 150 \text{ και } \quad a_1 \geq \frac{1}{2} a_{10}.$$

Θέτουμε $a_1 = x$. Επειδή οι ποσότητες αυξάνονται αυστηρά έχουμε:

$$a_2 \geq x + 1, \qquad a_3 \geq x + 2, \dots, \qquad a_{10} \geq x + 9.$$

Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_1 + \cdots + a_{10} \geq 10x + 45,$$

οπότε

$$10x + 45 \leq 150 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

Επιπλέον, από τον περιορισμό $a_1 \geq \frac{1}{2}a_{10}$ έχουμε:

$$a_1 \geq \frac{1}{2}a_{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{x+9}{2} \Leftrightarrow 2x \geq x + 9 \Leftrightarrow x \geq 9.$$

Άρα είναι: $x = 9$ ή $x = 10$.

Αν $x = 9$, τότε $a_{10} = 18$ και η μοναδική αυστηρά αύξουσα δεκάδα είναι

$$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$$

που αθροίζει σε $135 \neq 150$, άτοπο.
Αν $x = 10$, Η ελάχιστη δεκάδα είναι 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, με άθροισμα 145.
Προσθέτοντας κατάλληλα παίρνουμε μία έγκυρη δεκάδα:

$$10, 11, 12, 13, 14, \mathbf{16}, 17, 18, 19, 20 \text{ (άθροισμα 150)}.$$

Επομένως το έκτο κουτί έχει 16 μπίλιες.

(2ος τρόπος). Αν $a_1 \geq 11$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} \geq 11 + 12 + 13 + \cdots + 20 = \frac{11 + 20}{2} \cdot 10 = 155 > 150,$$

άτοπο. Άρα $a_1 \leq 10$.
Αν $a_{10} \leq 19$, τότε

$$a_{10} + a_9 + a_8 + \cdots + a_1 \leq 19 + 18 + 17 + \cdots + 10 = \frac{19 + 10}{2} \cdot 10 = 145 < 150,$$

άτοπο. Άρα $a_{10} \geq 20$, και $\alpha_1 \geq \frac{\alpha_{10}}{2} \geq 10$. Συνεπώς, $\alpha_1 = 10$ και $\alpha_{10} = 20$.
Παρατηρούμε ότι $\alpha_6 \geq \alpha_1 + 5 = 15$, και $\alpha_6 \leq \alpha_{10} - 4 = 16$, οπότε: $\alpha_6 = 15$ ή 16.
Αν $\alpha_6 = 15$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + \alpha_4 + a_5 + \alpha_6 = \frac{10 + 15}{2} \cdot 6 = 75,$$

οπότε

$$a_7 + a_8 + a_9 = 75 - \alpha_{10} = 55,$$

ενώ

$$a_9 + a_8 + a_7 \leq 19 + 18 + 17 = 54,$$

άτοπο. Άρα $\alpha_6 = 16$, με

$$(a_1, a_2, a_3, \alpha_4, a_5, \alpha_6, a_7, a_8, a_9, \alpha_{10}) = (10,11,12,13,14,16,17,18,19,20).$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ μία αριθμητική πρόοδος τέτοια ώστε $a_{m+n}=103$ *και* $a_{m-n}=49$, για κάποιους θετικούς ακέραιους $m>n$. Να βρεθεί η τιμή της διαφοράς $a_{na_m}-a_n$.

Λύση

Έστω ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου. Τότε ισχύουν:

$$a_{m+n}=a_m+n\omega \qquad (1) \quad \text{και} \quad a_{m-n}=a_m-n\omega \qquad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a_m=\frac{a_{m+n}+a_{m-n}}{2}=\frac{103+49}{2}=76 \text{ και } n\omega=\frac{a_{m+n}-a_{m-n}}{2}=\frac{103-49}{2}=27.$$

Επομένως, έχουμε:

$$a_{na_m}-a_n=a_{76n}-a_n=75n\omega=75\cdot 27=2025.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει:

$$11x^2y^2-y^4-25x^4+7=0$$

Λύση:

Έχουμε:

$$25x^4-11x^2y^2+y^4=7 \Leftrightarrow 25x^4-10x^2y^2+y^4-x^2y^2=7 \Leftrightarrow$$
$$(5x^2-y^2)^2-x^2y^2=7 \Leftrightarrow (5x^2-y^2+xy)(5x^2-y^2-xy)=7.$$

Επειδή ισχύει $5x^2-y^2+xy>5x^2-y^2-xy$ και $7=7\cdot 1=(-1)\cdot(-7)$, έπεται ότι:

$$5x^2-y^2+xy=7 \text{ και } 5x^2-y^2-xy=1 \qquad \text{(I)}$$

ή

$$5x^2-y^2+xy=-1 \text{ και } 5x^2-y^2-xy=-7 \qquad \text{(II)}$$

Από την (I) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$xy=3 \Leftrightarrow y=\frac{3}{x} \qquad (1)$$

οπότε:

$$5x^2-y^2=4 \qquad (2)$$

Από τις(1), (2) προκύπτει:

$$5x^2-\frac{9}{x^2}-4=0 \Leftrightarrow 5x^4-4x^2-9=0.$$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2=-1$, αδύνατο αφού $x^2\geq 0$, ή $x^2=\frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού x θετικός ακέραιος.

Από την (II) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \qquad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = -4 \qquad (3)$$

.

Από τις (1), (3) λαμβάνουμε:

$$5x^2 - \frac{9}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + 4x^2 - 9 = 0.$$

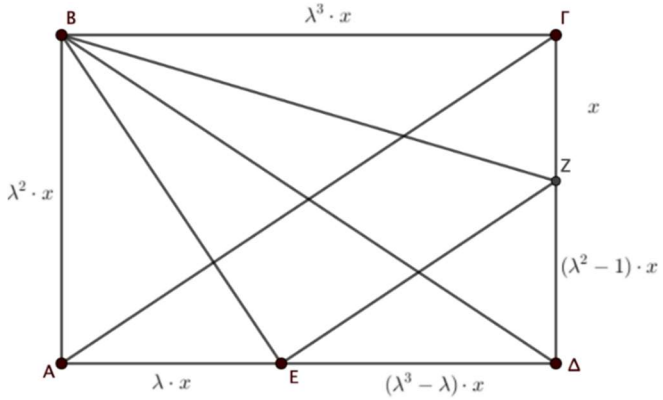
Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = -\frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού $x^2 \geq 0$. Επομένως, αφού x θετικός ακέραιος, έχουμε τελικά τη λύση:

$$x = 1, \qquad y = 3.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\text{ΒΓ} = \lambda \cdot \text{ΑΒ}$, για κάποιο $\lambda > 1$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΕΖ||ΑΓ, και $\text{ΒΕ̂Ζ} = 90^\circ$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{ΒΕΖ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}$ συναρτήσει του λ.

Λύση



Έστω $\text{ΓΖ} = x$. Αφού ΕΖ||ΑΓ, είναι

$$\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΓΖ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}} = \lambda,$$

οπότε $\text{ΑΕ} = \lambda x$. Αφού $\text{ΒΕ̂Ζ} = 90^\circ$, οι γωνίες ΑΕ̂Β και ΔΕ̂Ζ είναι συμπληρωματικές, και άρα τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΕΔΖ είναι όμοια, και άρα

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΖ}} = \lambda.$$

Έτσι, είναι $\text{ΑΒ} = \lambda \cdot \text{ΑΕ} = \lambda^2 x$, και $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ} = \lambda \cdot \text{ΑΒ} = \lambda^3 x$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\text{ΕΔ} = \text{ΑΔ} - \text{ΑΕ} = \lambda^3 x - \lambda x = \lambda(\lambda^2 - 1)x$$

και

$$\text{ΔΖ} = \frac{\text{ΔΕ}}{\lambda} = (\lambda^2 - 1)x.$$

(**1ος τρόπος**) Για τα εμβαδά έχουμε

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΒ} = \lambda^3\, x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5\, x^2,$$

$$(\text{ΒΑΕ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΑ} \cdot \text{ΑΕ} = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 x \cdot \lambda x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = \frac{1}{2\lambda^2} \cdot (\text{ΑΒΓΔ}),$$

$$(\text{ΖΔΕ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΕΔ} \cdot \Delta\text{Ζ} = \frac{1}{2} \cdot \lambda(\lambda^2 - 1)x \cdot (\lambda^2 - 1)x = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{2} = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (\text{ΑΒΓΔ}),$$

και

$$(\text{ΒΓΖ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \Gamma\text{Ζ} = \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 x \cdot x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = (\text{ΒΑΕ}).$$

Επομένως, έχουμε:

$$(\text{ΒΕΖ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) - (\text{ΖΔΕ}) - 2(\text{ΒΑΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) - \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (\text{ΑΒΓΔ}) - \frac{1}{\lambda^2} \cdot (\text{ΑΒΓΔ})$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^4}\right) \cdot (\text{ΑΒΓΔ}).$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με

$$\frac{(\text{ΒΕΖ})}{(\text{ΑΒΓΔ})} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^4}\right).$$

(**2ος τρόπος**) Έχουμε $(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΒ} = \lambda^3\, x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5\, x^2$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΑΕ έχουμε

$$\text{ΒΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΕ}^2 = \lambda^4\, x^2 + \lambda^2\, x^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2.$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΖΔΕ έχουμε

$$\text{ΕΖ}^2 = \text{ΕΔ}^2 + \Delta\text{Ζ}^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1)^2\, x^2 + (\lambda^2 - 1)^2\, x^2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2\, x^2,$$

οπότε

$$(\text{ΒΕΖ})^2 = \frac{\text{ΒΕ}^2 \cdot \text{ΕΖ}^2}{4} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2 \cdot (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2\, x^2}{4} = \left(\frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2\right)^2.$$

Αφού $\lambda > 1$, $\lambda(\lambda^4 - 1) > 0$, έπεται ότι:

$$(\text{ΒΕΖ}) = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2 = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (\text{ΑΒΓΔ}),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.

(**3ος τρόπος**) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x = 1$. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με $\text{Α}(0,0)$, $\text{Β}(0, \lambda^2)$, $\Gamma(\lambda^3, \lambda^2)$, $\text{Ε}(\lambda, 0)$, και $\text{Ζ}(\lambda^3, \lambda^2 - 1)$, αφού $\Gamma\text{Ζ} = 1$. Τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{\text{ΒΕ}} = (\lambda, -\lambda^2),\ \overrightarrow{\text{ΕΖ}} = (\lambda^3 - \lambda, \lambda^2 - 1) \text{ και}$$

$$\det(\overrightarrow{\text{ΒΕ}}, \overrightarrow{\text{ΕΖ}}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^3 - \lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda^2(\lambda^3 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda = \lambda(\lambda^4 - 1) > 0,$$

οπότε

$$(\text{ΒΕΖ}) = \frac{1}{2} \cdot \left|\det(\overrightarrow{\text{ΒΕ}}, \overrightarrow{\text{ΕΖ}})\right| = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (\text{ΑΒΓΔ}),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.