ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)$$

Λύση

Έχουμε

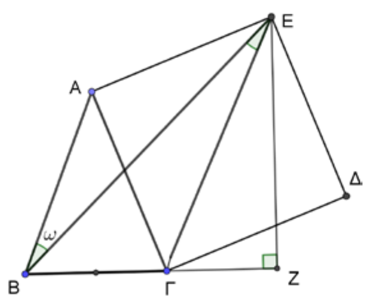
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)\\&=\left(\left(\frac{-21}{7}\right)^7+\left(\frac{-15}{-5}\right)^7+4044\right):\left(\left(\frac{-14}{7}\right)^3+\left(\frac{-18}{-9}\right)^3+2\right)\\&=\left((-3)^7+3^7+4044\right):\left((-2)^3+2^3+2\right)\\&=\left(-3^7+3^7+4044\right):\left(-2^3+2^3+2\right)=4044:2=2022.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

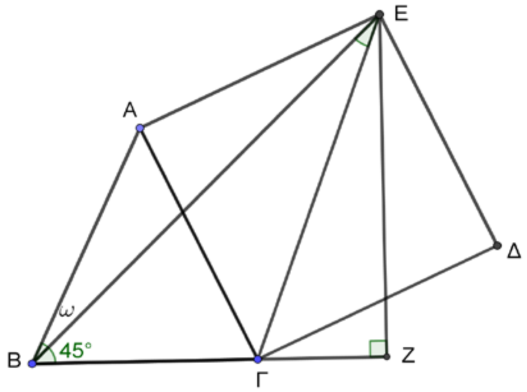
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\omega$ και $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma=90^0$, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: ΒΖ = ΕΖ



Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή ΑΕ = ΑΓ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \omega$. Επειδή $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{A}} + 90^0$, έπεται ότι:

$$\hat{\mathrm{A}} + 90^0 + 2\omega = 180^0 \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 90^0 - 2\omega .$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^0 - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^0 - \left(90^0 - 2\omega\right)}{2} = 45^0 + \omega .$$

(β) Έχουμε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \hat{\mathrm{B}} - \omega = \left(45^0 + \omega\right) - \omega = 45^0$. Επειδή το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 90^0$, έπεται ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 90^0 - \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 90^0 - 45^0 = 45^0$, οπότε το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με ΒΖ = ΕΖ.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα ¾ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x - 9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερη μέρα.

1η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\
&= \left(\left(\left(\frac{-22}{2} \right)^5 + \left(\frac{-44}{-4} \right)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\
&= \left(\left((-11)^5 + (+11)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left((-5)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\
&= \left(\left(-11^5 + 11^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(0 + 10^3 \right) \\
&= \left(0 \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : (+10) = 10^6 : 10^3 = 10^3.
\end{aligned}$$

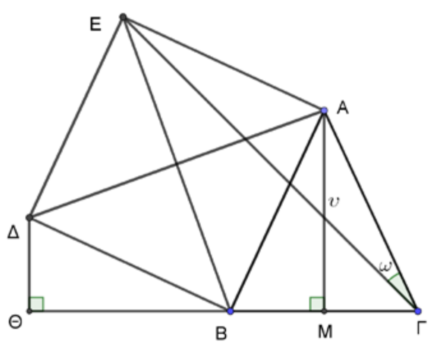
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\mathrm{A\hat{\Gamma}E} = \omega$, $\Delta\hat{\Theta}\mathrm{B} = 90^0 = \mathrm{A\hat{M}B}$ και $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$, $\mathrm{AM} = \upsilon$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $\mathrm{E\hat{\Gamma}B}$.

(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και υ.



Λύση

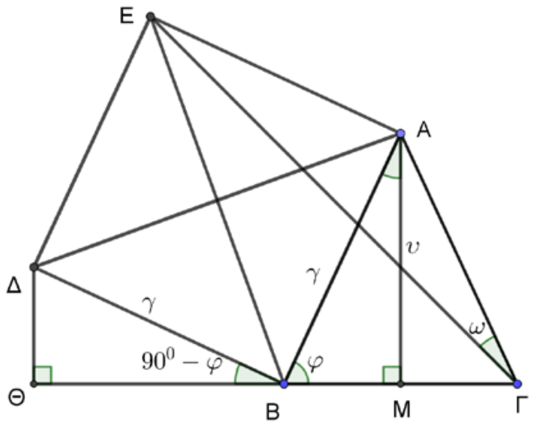
(α) Επειδή ΑΕ = ΑΒ = ΑΓ, το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \omega$.
Επειδή $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{A}} + 90^0$, έπεται ότι:

$$\hat{\mathrm{A}} + 90^0 + 2\omega = 180^0 \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 90^0 - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^0 - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^0 - \left(90^0 - 2\omega\right)}{2} = 45^0 + \omega.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} - \omega = \left(45^0 + \omega\right) - \omega = 45^0.$



Σχήμα 2

(β) (1^{ος} τρόπος)

Επειδή $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 90^0$, οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}$ και $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Theta$ έχουν άθροισμα 90^0 , δηλαδή είναι συμπληρωματικές. Έτσι, αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \varphi$, τότε $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Theta = 90^0 - \varphi$.
Έστω $\mathrm{AB} = \mathrm{B}\Delta = \gamma$. Τότε, αφού $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Theta = 90^0 - \Delta\hat{\mathrm{B}}\Theta = \varphi$, έχουμε:

$$\Delta\Theta = \gamma \cdot \eta\mu\left(90^0 - \varphi\right) = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\, \mathrm{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \mathrm{BM} = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\mathrm{B}\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\left(90^0 - \varphi\right) = \gamma \cdot \eta\mu\, \mathrm{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \eta\mu\varphi = \mathrm{AM} = \upsilon.$$

Άρα έχουμε:

$$\left(\mathrm{AM}\Theta\Delta\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{AM} + \Theta\Delta\right)\cdot \mathrm{M}\Theta = \frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\upsilon + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

(β) 2^{ος} τρόπος

Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΒΘΔ είναι ορθογώνια , αφού $\hat{\mathrm{M}} = \hat{\Theta} = 90^0$ και επιπλέον έχουν:

1. ΑΒ = ΒΔ, αφού το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο και

2. $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \Theta\hat{\mathrm{B}}\Delta$, αφού

$$M\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} = 45^0 - \omega,\ \Theta\hat{B}\Delta = 180^0 - A\hat{B}\Delta - \hat{B} = 180^0 - 90^0 - \left(45^0 + \omega\right) = 45^0 - \omega$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ και ΒΘΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$B\Theta = AM = \upsilon \text{ και } \Delta\Theta = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left(AM\Theta\Delta\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(AM + \Theta\Delta\right)\cdot M\Theta = \frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\upsilon + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\upsilon + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Πρόβλημα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν Α κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός Α, όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ, τέτοιοι ώστε:

$$\left\{\begin{matrix} A = 7\kappa + 1 \\ A = 9\lambda + 1 \\ A = 64\mu + 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A - 1 = 7\kappa \\ A - 1 = 9\lambda \\ A - 1 = 64\mu + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A - 1 = 7\kappa = 9\lambda = 64\mu + 2$$

$$\Rightarrow \frac{A-1}{63} = \frac{\kappa}{9} = \frac{\lambda}{7} = \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = 9\omega,\ \ \lambda = 7\omega \text{ και } \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z}.$$

Άρα ο αριθμός 63 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό $64\mu + 2$. Έχουμε:

$$\frac{64\mu+2}{63} = \frac{63\mu+\mu+2}{63} = \mu + \frac{\mu+2}{63} \Rightarrow \mu + 2 = 63\nu, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu = 63\nu - 2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$A = 64\mu + 3 = 64\cdot 63\nu - 128 + 3 = 4032\nu - 125.$$

Επειδή $35000 < A < 40000$, έχουμε:

$$35000 < 4032\nu - 125 < 40000 \Leftrightarrow 35125 < 4032\nu < 40125$$

$$\Leftrightarrow \frac{35125}{4032} < \nu < \frac{40125}{4032} \Leftrightarrow 8{,}71 < \nu < 9{,}95 \Leftrightarrow \nu = 9,$$

αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο πληθυσμός της πόλης είναι

$$A = 4032\cdot 9 - 125 = 36163.$$

2ος τρόπος

Αφού $35000 = 7\cdot 5000$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο $35000 = 7\cdot 5000 + 1 = 35001$.

Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35001, 35008, 35015, 35022, 35029, \ldots.$$

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του 35001 είναι 9, ο 35001 είναι πολλαπλάσιο του. Πράγματι, $35001 = 9 \cdot 3889$, οπότε ο πρώτος ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 9 είναι ο $35002 (= 9 \cdot 3889 + 1)$. Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35002, 35011, 35020, 35029, 35038, \ldots$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κοινός αριθμός από τις παραπάνω λίστες είναι ο 35029, και ότι κάθε επόμενος προκύπτει με πρόσθεση του ΕΚΠ$(7, 9) = 63$, οπότε έχουμε τους αριθμούς της μορφής

$$35029 + 63k,$$

με k μη αρνητικό ακέραιο.
Αφού $35000 = 546 \cdot 64 + 56$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 64 είναι ο $547 \cdot 64 + 3 = 35011$. Κάθε επόμενος τέτοιος αριθμός προκύπτει με πρόσθεση του 64, οπότε έχουμε τους αριθμούς

$$35011 + 64\lambda,$$

με λ μη αρνητικό ακέραιο.
Θέλουμε να καλύψουμε τη διαφορά $35029 - 35011 = 18$ προσθέτοντας τη διαφορά $64 - 63 = 1$, κατάλληλο αριθμό φορών, δηλαδή 18.
Πιο αναλυτικά, θέλουμε

$$35029 + 63k = 35011 + 64\lambda,$$

δηλαδή

$$64\lambda - 63k = 18 \qquad (1)$$

για κατάλληλους ακέραιους.
Αφού $64 - 63 = 1$, μια προφανής λύση είναι η $k = \lambda = 18$, και άρα

$$A = 35011 + 64 \cdot 18 = 36163.$$