ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$80^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta \ ,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Λύση
Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν τα άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Επομένως τα ψηφία $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αρκεί να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi o\lambda.9 \,.$$

Επειδή $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$ έπεται ότι $10 \le \alpha+\beta+\gamma+\delta \le 30$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=18,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta \text{ ή } \alpha+\beta+\gamma+\delta=27,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(1,2,6,9),(1,2,7,8),(1,3,5,9),(1,3,6,8).(1,4,5,8),(1,4,6,7),$$
$$(2,3,4,9),(2,3,5,8),(2,3,6,7),(2,4,5,7),(3,4,5,6)\}$$

$$\text{ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(4,6,8,9),(5,6,7,9)\}.$$

Επιπλέον ένα ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε αρκεί ο ακέραιος $\overline{\gamma\delta}$ να είναι πολλαπλάσιος του 4. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις παραπάνω τετράδες στις :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(1,3,6,8) \text{ ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(3,4,5,6).$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι είναι οι: 13068, 34056.

Πρόβλημα 2
Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Λύση

Έστω ότι ο Γιάννης είχε α ευρώ μαζί του, οπότε η Μαρία θα είχε $600-\alpha$ ευρώ. Τότε ο Γιάννης ξόδεψε $\alpha\cdot\frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100}=\frac{\alpha}{9}$ ευρώ, ενώ η Μαρία ξόδεψε $\left(600-\alpha\right)\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{1}{100}=\frac{600-\alpha}{7}$. Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\alpha}{9}+\frac{600-\alpha}{7}=80 \Leftrightarrow 7\alpha+9\left(600-\alpha\right)=5040$$

$$\Leftrightarrow 5400-2\alpha=5040 \Leftrightarrow 2\alpha=360 \Leftrightarrow \alpha=180.$$

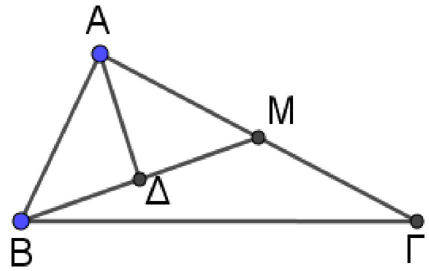
Άρα ο Γιάννης είχε μαζί του 180 ευρώ και η Μαρία είχε $600-180=420$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha\ cm$ και $\mathrm{A\Gamma}=2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.

(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.

(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Έχουμε:

$$(\mathrm{AB\Gamma})=2(\mathrm{ABM}) \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}=2\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AM} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma}=2\mathrm{AM}.$$

Επομένως Μ μέσον ΑΓ και Ισχύει $\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha\ cm$. Αφού και $\mathrm{AB}=\alpha\ cm$, έχουμε $\mathrm{AB}=\mathrm{AM}$. Επομένως το σημείο Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ και αφού Δ μέσον της ΒΜ, προκύπτει ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΜ. Άρα είναι $\mathrm{A\Delta}\perp\mathrm{BM}$.

Διαφορετικά, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο, άρα και ύψος.

(β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο και ύψος, το ΑΔ θα είναι και διχοτόμος του. Επομένως $\mathrm{B\hat{A}\Delta}=\mathrm{\Delta\hat{A}M}=45^0$. Όμως ισχύει ότι $\mathrm{A\hat{B}\Delta}=\mathrm{A\hat{M}\Delta}=45^0$ (αφού ΑΒΜ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο) επομένως ΑΒΔ και ΑΔΜ ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα δηλαδή $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta M}=\mathrm{\Delta B}=\frac{\mathrm{BM}}{2}$. Τώρα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \mathrm{A\Delta}}}{\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \mathrm{BM}}}=\frac{\mathrm{A\Delta}^2}{\mathrm{BM}^2}=\frac{\mathrm{A\Delta}^2}{(2\mathrm{A\Delta})^2}=\frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}=2020.$$

Επειδή πρέπει $\mathrm{A}>2020$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha\geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha\geq 4,$ τότε $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 4000,\ \mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}<1000,$ οπότε
$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}>3000>2020, \text{ άτοπο.}$$
- Αν είναι $\alpha=3,$ τότε
$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{B}&=\overline{3\beta\gamma\delta}-\overline{3\beta\gamma}\\&=3000+100\beta+10\gamma+\delta-300-10\beta-\gamma\\&=2700+90\beta+9\gamma+\delta>2020, \text{ άτοπο.}\end{aligned}$$
- Αν είναι $\alpha=2,$ τότε
$$\begin{aligned}&\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{2\beta\gamma\delta}-\overline{2\beta\gamma}=2020\\&\Leftrightarrow 2000+100\beta+10\gamma+\delta-200-10\beta-\gamma=2020\\&\Leftrightarrow 1800+90\beta+9\gamma+\delta=2020\\&\Leftrightarrow 90\beta+9\gamma+\delta=220.\end{aligned}$$
  Επειδή τα β,γ,δ είναι ψηφία, θα είναι $0\leq 9\gamma+\delta\leq 90,$ οπότε πρέπει $130\leq 90\beta\leq 220\Leftrightarrow\beta=2$. Τότε $9\gamma+\delta=40\Rightarrow 31\leq 9\gamma\leq 40\Rightarrow\gamma=4.$ Επομένως: $\delta=40-36=4$ και $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=2244$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha+9=(\beta-3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta+9=(\alpha-3)^2\ ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2+\beta^2$.

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γράφονται:

$$\alpha=\beta^2-6\beta \qquad (1)$$
$$\beta=\alpha^2-6\alpha \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2-6(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=7(\alpha+\beta) \qquad (3)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha-\beta=\beta^2-\alpha^2-6(\beta-\alpha)\Leftrightarrow(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-5(\beta-\alpha)=0 \qquad (4)$$
$$\Leftrightarrow(\beta-\alpha)(\beta+\alpha-5)=0\overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow}\alpha+\beta=5. \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) λαμβάνουμε: $\alpha^2+\beta^2=35$.

Πρόβλημα 2

Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}=2019.$$

Επειδή πρέπει $\mathrm{A}>2019$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha\geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha\geq 4$, τότε $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 4000$, $\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}<1000$, οπότε
$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}>3000>2019, \text{ άτοπο.}$$
- Αν είναι $\alpha=3$, τότε
$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{B}&=\overline{3\beta\gamma\delta}-\overline{3\beta\gamma}\\&=3000+100\beta+10\gamma+\delta-300-10\beta-\gamma\\&=2700+90\beta+9\gamma+\delta>2019, \text{ άτοπο.}\end{aligned}$$
- Αν είναι $\alpha=2$, τότε
$$\begin{aligned}&\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{2\beta\gamma\delta}-\overline{2\beta\gamma}=2019\\&\Leftrightarrow 2000+100\beta+10\gamma+\delta-200-10\beta-\gamma=2019\\&\Leftrightarrow 1800+90\beta+9\gamma+\delta=2019\\&\Leftrightarrow 90\beta+9\gamma+\delta=219.\end{aligned}$$
Επειδή τα β,γ,δ είναι ψηφία, θα είναι $0\leq 9\gamma+\delta\leq 90$, οπότε πρέπει $130\leq 90\beta\leq 219\Leftrightarrow\beta=2$. Τότε $9\gamma+\delta=39\Rightarrow 31\leq 9\gamma\leq 39\Rightarrow\gamma=4.$ Επομένως: $\delta=39-36=3$ και $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=2243$.

Πρόβλημα 3.

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α,β,γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και (iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ,λ,μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$2\alpha-1=\kappa\beta,\quad \beta-1=\lambda\gamma,\ \gamma-1=\mu\alpha .$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}&2\alpha=\kappa\beta+1=\kappa\left(\lambda\gamma+1\right)+1=\kappa\left(\lambda(\mu\alpha+1)+1\right)+1\\&\Rightarrow 2\alpha=\kappa\lambda\mu\alpha+\kappa\lambda+\kappa+1\\&\Rightarrow\alpha=\frac{\kappa\lambda+\kappa+1}{2-\kappa\lambda\mu}.\end{aligned}$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

$$2-\kappa\lambda\mu>0\Leftrightarrow\kappa\lambda\mu<2.$$

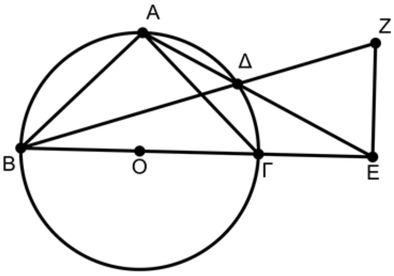
Επειδή οι κ, λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι έχουμε μόνο την περίπτωση:

- $\kappa = \lambda = \mu = 1$. Τότε $\alpha = 3$.

  $\alpha = 3, \gamma - 1 = \alpha, \beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 3, \gamma = 4, \beta = 5 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (3,5,4)$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$

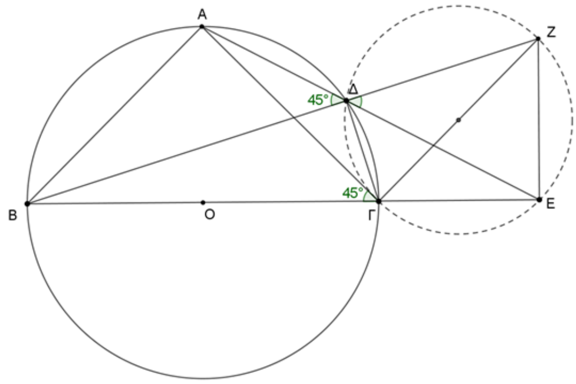
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$

Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$, τα τόξα $\widehat{BA}$ και $\widehat{A\Gamma}$ είναι ίσα και επιπλέον το άθροισμα μας τους είναι 180° , οπότε καθένα από αυτά θα είναι 90°. Επομένως η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Delta}B$ στο τόξο $\widehat{BA}$ θα είναι ίση με $\dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Όμως οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{\Delta}B$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, οπότε $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$



Σχήμα 2

(β) Επειδή η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, είναι . $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ Επομένως θα έχουμε και ότι $\Gamma\hat{\Delta}Z = 180^\circ - B\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Επίσης δίνεται ότι $\Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$. Επομένως ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα ΓΖ περνάει από τα σημεία Δ και Ε. Τότε η εγγεγραμμένη σε αυτόν το κύκλο γωνία $Z\hat{\Gamma}E$ βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη γωνία $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$. Άρα είναι $Z\hat{\Gamma}E = 45^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Gamma E = EZ$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x>1,$ έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=x\alpha\beta \qquad (1)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη της (1) διαδοχικά επί α και β, και πρόσθεση στη συνέχεια κατά μέλη των δύο σχέσεων που προκύπτουν, έχουμε:

$$\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3=x\alpha^2\beta+x\alpha\beta^2 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)=x\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\xRightarrow{\alpha+\beta=1}\alpha^3+\beta^3=(x-1)\alpha\beta. \qquad (2)$$

Επομένως, έχουμε;

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(x-1)\alpha\beta}{x\alpha\beta}=\frac{x-1}{x}$$

και ομοίως

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{x\alpha\beta}{(x-1)\alpha\beta}=\frac{x}{x-1}.$$

Επομένως η δεδομένη ισότητα γίνεται εξίσωση με άγνωστο το x:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow 6\left[(x-1)^2+x^2\right]=13x(x-1)\Leftrightarrow 12x^2-12x+6=13x^2-13x$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ (απορρίπτεται, αφού } x>1) \text{ ή } x=3.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύει:

$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha>0$ ισχύει:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \text{ (με την ισότητα να ισχύει για } \alpha=1).$$

Θέτοντας τώρα όπου α το $x-2y+\omega$ και $2x-y+\omega$ στην προηγούμενη σχέση, προκύπτουν οι ανισοτικές σχέσεις:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} \geq 2 \qquad (3)$$
$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} \geq 2 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} = 2 \qquad (5)$$
$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} = 2, \qquad (6)$$

οπότε $x - 2y + \omega = 1$ και $2x - y + \omega = 1$ από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y = 0$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\omega^2 - 2\omega \geq -1 \Leftrightarrow (\omega - 1)^2 \geq 0 \text{ (που ισχύει).}$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $2\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$2\alpha - 1 = \kappa\beta, \ \ 2\beta - 1 = \lambda\gamma, \ \gamma - 1 = \mu\alpha .$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \kappa\beta + 1 = \kappa\left(\frac{\lambda\gamma + 1}{2}\right) + 1 = \kappa\left(\frac{\lambda(\mu\alpha + 1) + 1}{2}\right) + 1 \\ &\Rightarrow 4\alpha = \kappa\lambda\mu\alpha + \kappa\lambda + \kappa + 2 \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{\kappa\lambda + \kappa + 2}{4 - \kappa\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

$$4 - \kappa\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda\mu < 4.$$

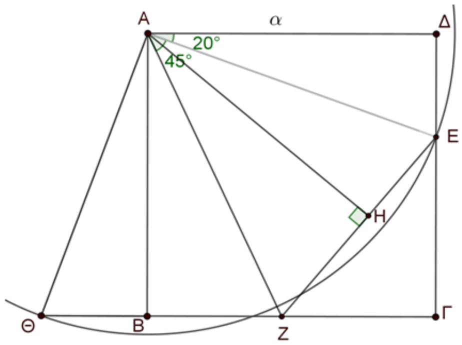
Οι κ, λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, αφού $2\alpha - 1 > 0$, $2\beta - 1 > 0$ και $\gamma - 1 > 0$. Επιπλέον, οι κ, λ πρέπει να είναι περιττοί, όπως προκύπτει από τις δύο πρώτες εξισώσεις. Επομένως, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa = \lambda = \mu = 1$. Τότε $\alpha = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$, άτοπο .
- $\kappa = \lambda = 1$, $\mu = 2$. Τότε:
  $\alpha = 2, \gamma - 1 = 2\alpha = 4, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 2, \gamma = 5, \beta = 3 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (2,3,5)$
- $\kappa = 3, \lambda = \mu = 1$. Τότε:
  $\alpha = 8, \gamma - 1 = \alpha, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 8, \gamma = 9, 2\beta = 10 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (8,5,9)$.

- $\kappa = 1, \lambda = 3, \mu = 1$. Τότε:
  $\alpha = 6, \gamma - 1 = \alpha, 2\beta - 1 = 3\gamma \Rightarrow \alpha = 6, \gamma = 7, 2\beta = 22 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (6, 11, 7)$.
- $\kappa = \lambda = 1, \mu = 3$. Τότε:
  $\alpha = 4, \gamma - 1 = 3\alpha, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 6, \gamma = 13, 2\beta = 14 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (4, 7, 13)$.

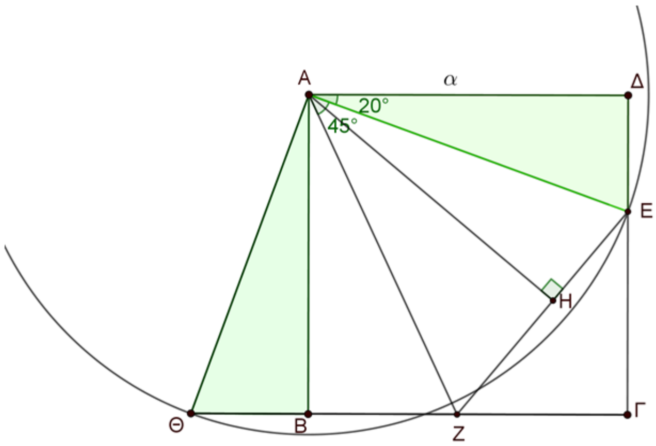
Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E = 20^0$ και $E\hat{A}Z = 45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta = ZE$ και υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α.



Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 3

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΘ είναι ορθογώνια με $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Theta = 90^0$ και επιπλέον έχουν:

- $A\Delta = AB = \alpha$
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $B\hat{A}\Theta = \Delta\hat{A}E = 20^0$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $B\hat{A}Z = B\hat{A}\Delta - Z\hat{A}E - E\hat{A}\Delta = 90^0 - 45^0 - 20^0 = 25^0$, οπότε

$$\Theta\hat{A}Z = \Theta\hat{A}B + B\hat{A}Z = 20^0 + 25^0 = 45^0$$

Τα τρίγωνα ΑΘΖ και ΑΖΕ έχουν:

- $AZ = AZ$, κοινή πλευρά
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου)
- $\Theta\hat{A}Z = 45^0 = Z\hat{A}E$

  Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $Z\Theta = ZE$

  και επιπλέον $A\hat{\Theta}Z = A\hat{E}Z$.

Τέλος τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΗΕ είναι ορθογώνια με $A\hat{B}\Theta = A\hat{H}E = 90^0$ και έχουν:

- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)
- $A\hat{\Theta}B = A\hat{\Theta}Z = A\hat{E}Z = A\hat{E}H$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $AH = AB = \alpha$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1 - x_2| = 7$.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

$$\Leftrightarrow x(3-x) + 6\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(x+3) \Leftrightarrow 3x - x^2 + 6\lambda^2 - \lambda x - 6\lambda = 0,\ x \neq 0, \pm 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (\lambda - 3)x + 6\lambda - 6\lambda^2 = 0,\ x \neq 0, \pm 3.$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4(6\lambda - 6\lambda^2) = 25\lambda^2 - 30\lambda + 9 = (5\lambda - 3)^2 \geq 0$$

και για $\lambda \neq \frac{3}{5}$, έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους

$$x_1 = 2\lambda,\ x_2 = 3 - 3\lambda.$$

Λόγω του περιορισμού:

$x_1 \neq 0, \pm 3$, οπότε $\lambda \neq 0, \pm\frac{3}{2}$ και $x_2 \neq 0, \pm 3$, οπότε $\lambda \neq 0, 1, 2$.

Επομένως, για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, 1, 2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right\}$, πρέπει να ισχύει:

$$|x_1 - x_2| = 7 \Leftrightarrow |5\lambda - 3| = 7 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται) ή } \lambda = -\frac{4}{5},$$

οπότε η ζητούμενη τιμή είναι $\kappa = -\frac{4}{5}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x,y) = x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy = 1,\ x, y > 0$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

Λύση

(α) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7\\
&= x\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)+y\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)\\
&= \left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)(x+y)=\left[x^4\left(x^2+y^2\right)+y^4\left(x^2+y^2\right)\right](x+y)\\
&= \left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)=\left(x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)\\
&= \left[\left(x^2+y^2\right)^2-\left(\sqrt{2}xy\right)^2\right]\left(x^2+y^2\right)(x+y)\\
&= \left(x^2+y^2+\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2-\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y).
\end{aligned}
$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση

$$P(x,y)=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y).$$

Θεωρώντας $xy=1,\ x,y>0,$ έχουμε τις ανισότητες:

$$
\begin{aligned}
&x^4+y^4 \geq 2x^2y^2=2 \text{ (η ισότητα ισχύει όταν } x=y=1),\\
&x^2+y^2 \geq 2xy=2 \quad \text{(η ισότητα ισχύει όταν } x=y=1),\\
&x+y \geq 2\sqrt{xy}=2 \quad \text{(η ισότητα ισχύει όταν } x=y=1),
\end{aligned}
$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$P(x,y)=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)\geq 8,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=y=1$.

Πρόβλημα 3

Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ,
- από τις 21 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ,
- από τις 26 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε.

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{10\alpha+5\beta+5\gamma}{20}=30\\ \dfrac{5\beta+5\gamma+5\delta}{15}=20\\ \dfrac{5\gamma+5\delta+5\varepsilon}{15}=10\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\alpha+\beta+\gamma=120\\ \beta+\gamma+\delta=60\\ \gamma+\delta+\varepsilon=30\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma=10\alpha+5\beta+5\gamma+5\delta+5\varepsilon=5\cdot\left[(2\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma+\delta+\varepsilon)-\gamma\right]=5(150-\gamma).\qquad(4)$$

Από την (3) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\max}=30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha+\beta=120,\ \beta+\delta=30,\ \delta+\varepsilon=0$, με μία πιθανή λύση $\alpha=45,\ \beta=30,\ \delta=\varepsilon=0$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\min}=0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha+\beta=120,\ \beta+\delta=60,\ \delta+\varepsilon=30$ με μία πιθανή λύση $\alpha=\beta=40$, $\delta=20,\ \varepsilon=10$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε:

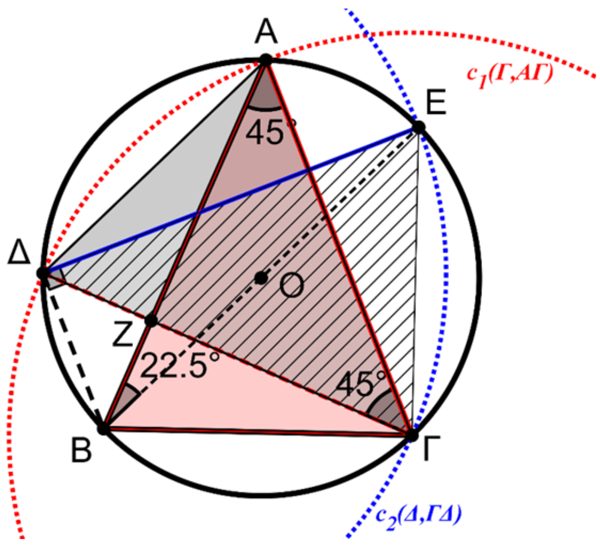
$$\Sigma_{\min}=5(150-\gamma_{\max})=5(150-30)=600,$$
$$\Sigma_{\max}=5(150-\gamma_{\min})=5(150-0)=750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma=10$, τότε $\Sigma=5(150-20)=650$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A}=45°$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\Delta,\Gamma\Delta)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει την AB στο Z, να αποδείξετε ότι τα σημεία B,O,E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην ΔE.

Λύση



Σχήμα 4

Από την εκφώνηση του προβλήματος ισχύουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων: $AB=A\Gamma$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές), $\Gamma\Delta=A\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου c_1) και $\Gamma\Delta=\Delta E$

(ακτίνες του κύκλου c_2)
Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$AB = A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E \quad (1).$$

Ισχύουν επίσης οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma \qquad (2)$$

Επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$,. $\Gamma\Delta A$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, οπότε θα είναι:

$$\Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{A}\Gamma = 45^0.$$

Επομένως, είναι $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma - E\hat{B}\Gamma = 67,5^0 - 45^0 = 22,5^0$ και επιπλέον ισχύει:

$$A\hat{B}O = \frac{180^0 - A\hat{O}B}{2} = \frac{180^0 - 135^0}{2} = 22,5^0$$

Από την ισότητα $A\hat{B}E = A\hat{B}O$, συμπεραίνουμε ότι τα σήμεια B, O, E είναι συνευθειακά. Αφού τα σήμεια B, O, E είναι συνευθειακά, η γωνία $B\Delta E$ είναι ορθή, οπότε: $\Delta B \perp \Delta E$. Επίσης $B\hat{\Delta}Z = \Delta\hat{B}Z = 45^0 \Rightarrow$ Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$, οπότε $\Delta B \perp OZ$. Από τις καθετότητες $\Delta B \perp \Delta E$ και $\Delta B \perp OZ$, συμπεραίνουμε $\Delta E \parallel OZ$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n, $n = 1,2,3,....$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, $n = 1,2,3,...$ να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1} = \frac{M_n + M_{n+2}}{2}, \text{ για κάθε } n = 1,2,3,...$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n, $n = 1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε

$M_{n+2} - M_{n+1} = M_{n+1} - M_n$, για κάθε $n = 1,2,3,...$, οπότε η ακολουθία $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, $n = 1,2,3,...$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Επομένως, υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$M_n = M_1 + (n-1)\omega = a_1 + (n-1)\omega, \; n = 1,2,3,... \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της ακολουθίας M_n έχουμε:

$$nM_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$(n-1)M_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1} \;.$$

Από την τελευταία σχέση, λόγω της (1), λαμβάνουμε:

$$a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1} = n\left[a_1 + (n-1)\omega\right] - (n-1)\left[a_1 + (n-2)\omega\right]$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \left[n(n-1) - (n-1)(n-2)\right]\omega = a_1 + (2n-2)\omega = a_1 + (n-1)\cdot 2\omega.$$

Επομένως η ακολουθία a_n, $n = 1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2ω.

Πρόβλημα 2

Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 5 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α,
- από τις 6 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ,
- από τις 21 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε.

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5\alpha+5\beta+5\gamma}{15}=10 \\ \dfrac{5\beta+5\gamma+5\delta}{15}=20 \\ \dfrac{5\gamma+5\delta+10\varepsilon}{20}=30 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=30 \\ \beta+\gamma+\delta=60 \\ \gamma+\delta+2\varepsilon=120 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma=5\alpha+5\beta+5\gamma+5\delta+10\varepsilon=5\cdot\left[(\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma+\delta+2\varepsilon)-\gamma\right]=5(150-\gamma). \quad (4)$$

Από την (1) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\max}=30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $\alpha+\beta=0,\ \beta+\delta=30,\ \delta+2\varepsilon=90$, και μία πιθανή λύση $\alpha=\beta=0,\ \delta=30,\ \varepsilon=45$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\min}=0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $\alpha+\beta=30,\ \beta+\delta=60,\ \delta+2\varepsilon=120$ και μία πιθανή λύση $\alpha=10,\ \beta=20,\ \delta=40,\ \varepsilon=40$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\Sigma_{\min}=5(150-\gamma_{\max})=5(150-30)=600,$$

$$\Sigma_{\max}=5(150-\gamma_{\min})=5(150-0)=750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma=10$, τότε $\Sigma=5(150-10)=700$.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P(x^2) = (P(x))^2 - 2P(x) + 2,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$P(x^2) - 1 = (P(x) - 1)^2, \qquad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε, αν θέσουμε $Q(x) = P(x) - 1$, έχουμε

$$Q(x^2) = (Q(x))^2, \qquad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(α) Το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $Q(x) = c$. Τότε από τη σχέση (2) έχουμε: $c = c^2 \Leftrightarrow c = 0$ ή $c = 1$, οπότε $P(x) = 1$ ή $P(x) = 2$.

(β) Το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό $n \geq 1$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$Q(x) = a_n x^n + R(x), a \neq 0, \text{ όπου } \deg R(x) = r \leq n-1 \text{ ή } R(x) = 0. \qquad (3)$$

Αν $R(x) \neq 0$, από τη σχέση (2) έχουμε:

$$a_n x^{2n} + R(x^2) = a_n^2 x^{2n} + 2a_n x^n R(x) + (R(x))^2$$

$$\Leftrightarrow a_n = 1 \text{ και } R(x^2) = 2a_n x^n R(x) + (R(x))^2.$$

Συγκρίνοντας τους βαθμούς των πολυωνύμων των δυο μελών της τελευταίας σχέσης, παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο του πρώτου μέλους της έχει βαθμό $2r$, ενώ το πολυώνυμο του δευτέρου μέλους της έχει βαθμό $n + r$, οπότε πρέπει $r = n$, άτοπο. Επομένως είναι $R(x) = 0$ και $Q(x) = x^n \Rightarrow P(x) = x^n + 1, n \geq 1$.

Επομένως, τα πολυώνυμα που ζητάμε είναι: $P(x) = 1$ ή $P(x) = 2$ ή $P(x) = x^n + 1$, $n \geq 1$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με $AB < AΓ < BΓ$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του $Δ$ βρίσκεται επάνω στην $BΓ$ και περνά από τα σημεία B, O. Ο κύκλος c_1 τέμνει την AB στο σημείο E και τον κύκλο c στο σημείο Z. Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $OΔE$, $c_2(O, Δ, E)$ τέμνει την AB στο σημείο K, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Γ, Δ, Z, O$ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOK.

Λύση

Η $OΔ$ είναι διάκεντρος των κύκλων c και c_1, άρα θα είναι μεσοκάθετος της κοινής τους χορδής BZ. Δηλαδή η $OΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BOZ}$ του ισοσκελούς τριγώνου BOZ.

Άρα: $$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{x}.$$

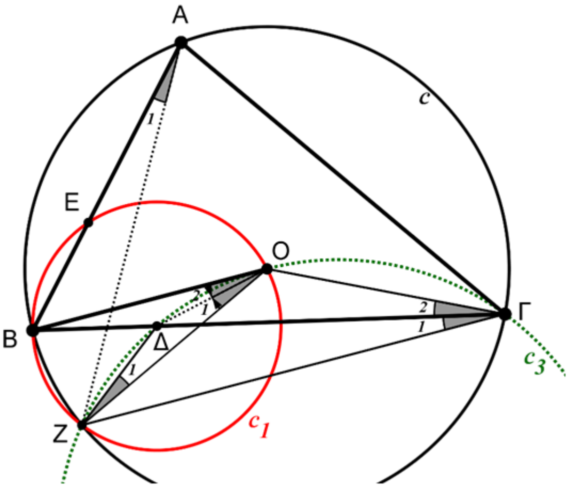
Η γωνία $\hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c με αντίστοιχη επίκεντρη την γωνία $\widehat{BOZ}$, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{x}.$$

Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{Γ}_1$ είναι εγγεγραμμένς στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο BZ, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{x}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{x}$, οπότε τα σημεία Γ, Δ, Z, O βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο (έστω c_3).



Σχήμα 5

Επί πλέον ισχύουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

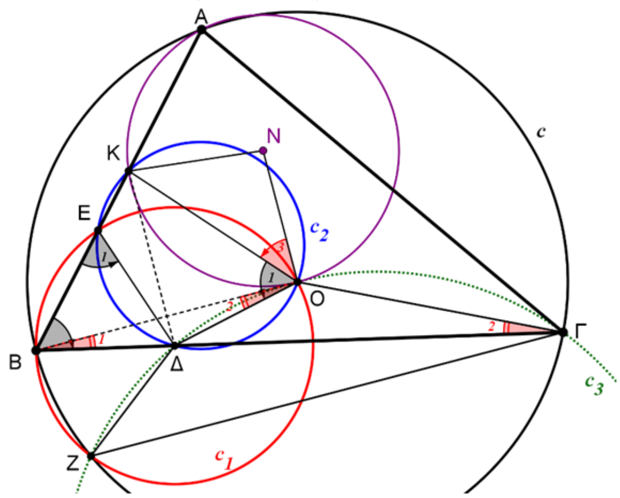
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔOZ έχουμε: $\hat{O}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{x}$.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\Gamma O\Delta Z$ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90° - \hat{A} = \hat{x}$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓOZ ισχύει $\widehat{\Gamma OZ} = \widehat{O\Gamma Z} = 2\hat{x}$, άρα $OB \parallel \Gamma Z$.

Εφόσον το τρίγωνο ΓOZ είναι ισοσκελές το κέντρο του κύκλου c_3 θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΓZ.

Αν τώρα συμβολίσουμε με N το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AOK, αρκεί να αποδείξουμε ότι $ON \perp \Gamma Z$ ή ισοδύναμα $ON \perp OB$.



Σχήμα 6

Από το ισοσκελές τρίγωνο NOK έχουμε:

$$\hat{O}_3 = 90° - \frac{\widehat{KNO}}{2} = 90° - \widehat{KAO} = 90° - \widehat{BAO} = 90° - (90° - \hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{\Gamma}.$$

Ισχύει: $\hat{O}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{x} = 90° - \hat{A} \Rightarrow \hat{O}_2 = 90° - \hat{A}$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο } O\Delta EK \text{ έχουμε: } \hat{O}_1 = \hat{E}_1 \\ \text{Από το ισοσκελές τρίγωνο } \Delta BE \text{ έχουμε: } \hat{E}_1 = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}.$$

Άρα έχουμε: $\widehat{NOB} = \hat{O}_3 + \hat{O}_1 - \hat{O}_2 = \hat{\Gamma} + \hat{B} - 90° + \hat{A} = 90°$.