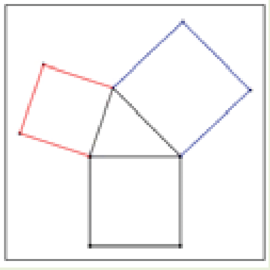
Ασκήσεις στον Ανεμόμυλο

Δημήτριος Νικολακόπουλος
προπτυχιακός τριτοετής φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Πατρών



Ανεμόμυλος είναι το υποκοριστικό του διπλανού σχεδίου, στο οποίο στηρίζεται το θεώρημα του **Vecten**. Παρουσιάζουμε παρακάτω το εν λόγω θεώρημα, καθώς και μια σειρά από προτεινόμενες ασκήσεις. Ο Vecten, ένας μάλλον άσημος γεωμέτρης, δημοσίευσε 22 άρθρα μέσα σε 14 χρόνια (1810-1824) στα ***Χρονικά*** του **Gergonne**. Το μόνο που γνωρίζουμε γι αυτόν είναι πως κατά τα χρόνια των δημοσιεύσεών του υπηρετούσε ως καθηγητής στο Λύκειο της πόλης **Nimes**.
Το θεώρημα του Vecten και έξι προτεινόμενες ασκήσεις - εφαρμογές του θεωρήματος πρωτοπαρουσιάστηκαν στο περιοδικό Ευκλείδης Β, τόμος 1 τεύχος 2, Δεκέμβριος-Ιανουάριος **1977**.

Ποιος ο λόγος να ασχοληθούμε με τον Vecten και τις ασκήσεις του; Ένας βασικός λόγος είναι ο πλούτος των ιδιοτήτων των σημείων που προκύπτουν από την επεξεργασία του θεωρήματος και αποτελούν ένα ικανοποιητικό πλαίσιο εξάσκησης για όσους θέλουν να συμμετάσχουν σε μαθηματικές ολυμπιάδες. Επιπλέον, ασκήσεις σαν κι αυτές, προτείνει για μελέτη το Πανεπιστήμιο του Cambridge στους καθηγητές και σπουδαστές του.

Για την ιστορία...

Ο ανεμόμυλος ήταν ήδη γνωστός από τον 3ο αιώνα π.Χ, από το έργο του Ευκλείδη και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Ας θυμηθούμε την απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος με τα τρία τετράγωνα γύρω από τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Επανεμφανίζεται τον 4ο αιώνα μ.Χ. από τον **Πάππο** τον Αλεξανδρινό και αφορά το τυχαίο τρίγωνο, κατόπιν τον 9ο αιώνα μ.Χ. από τον Θαμπίτ Ιμπν Κουρά, τον 13ο αιώνα μ.Χ. σε μια αραβική μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη, τον 15ο αιώνα μ.Χ. στο έργο του **Λεονάρντο ντα Βίντσι**, όπως αναφέρει ο Howard Eaves, τον 19ο αιώνα μ.Χ. από τον Vecten και τον 20ο αιώνα από τον **Victor Thébault**, στον οποίο οφείλεται και η ιστορική αυτή καταγραφή.

Στη διάρκεια των αιώνων πολλοί γεωμέτρες ενδιαφέρθηκαν για τον ανεμόμυλο, δίνοντάς του μάλιστα και άλλα ονόματα. Για παράδειγμα, οι έλληνες και οι ινδοί ονόμασαν το σχήμα "η καρέκλα της νύφης", άλλοι "η κουκούλα του Φραγκισκανού", άλλοι "η ουρά του παγωνιού" και οι ρώσοι "το παντελόνι του Πυθαγόρα". Σίγουρα η πιο επιτυχημένη ονομασία φαίνεται να είναι η επικρατούσα, "ανεμόμυλος".

Θεώρημα Vecten: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έξω απ' αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ. Τότε ισχύει:

1. **α)** Η διάμεσος ΑΜ του $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ είναι κάθετη στην ΕΘ και είναι $\text{ΑΜ} = \dfrac{\text{ΕΘ}}{2}$.

β) Αντίστοιχα, η διάμεσος ΑΟ του $\overset{\triangle}{\text{ΑΕΘ}}$ είναι κάθετη στην ΒΓ και $\text{ΑΟ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$.

2. Αν Σ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΕΑΘΣ τότε: τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΙ είναι ίσα και κάθετα αντίστοιχα με τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΣ και ΓΣ και τέμνονται σε σημείο Η_1 του ύψους ΑΚ.

3. Είναι $\text{ΒΘ} \perp \text{ΓΕ}$ και ΒΘ=ΓΕ.

4. Αν Τ_1 το σημείο τομής των ΘΒ και ΓΕ, Τ_2 το σημείο τομής των ΑΗ και ΓΔ και Τ_3 το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΙ, τότε οι ευθείες ΑΤ_1, ΒΤ_2, ΓΤ_3 είναι αντίστοιχα κάθετες στις ΔΙ, ΕΖ, ΗΘ, οι οποίες περνάνε αντίστοιχα από τα Τ_1, Τ_2, Τ_3.

5. Αν Ο_1, Ο_2, Ο_3 είναι τα κέντρα των τετραγώνων ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ, ΑΒΔΕ τότε οι ευθείες ΑΟ_1, ΒΟ_2, ΓΟ_3 περνάνε από το ίδιο σημείο U (Σημείο Vecten του $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$), το οποίο είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\text{Ο}_1\text{Ο}_2\text{Ο}_3$.

6. Αν Φ είναι το μέσον του ΔΙ, τότε το τρίγωνο ΒΦΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

7. Το τρίγωνο $\text{Ο}_2\text{ΜΟ}_3$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

8. Οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων ΑΒΔΕ, ΑΓΙΘ και οι ευθείες ΒΘ, ΓΕ, ΔΙ, ΑΟ_1 περνάνε από το ίδιο σημείο.

9. Οι ευθείες ΕΙ, ΔΘ, ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο Η_2.

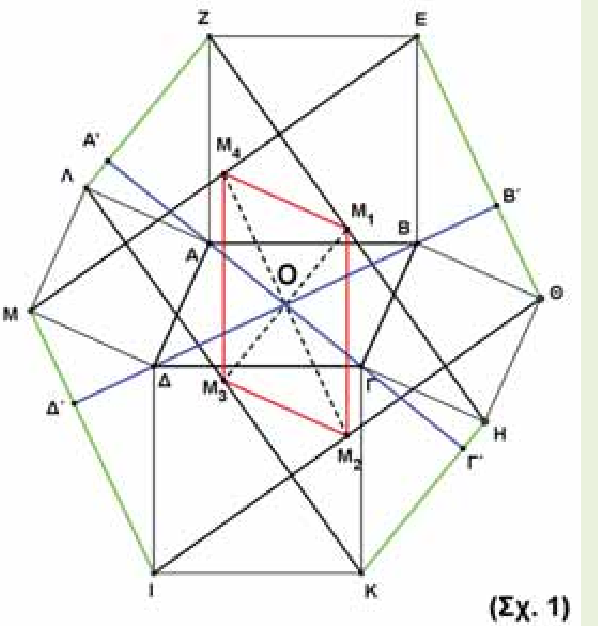
Ασκήσεις

1. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ, που φτιάχνονται εξωτερικά αυτού. Να αποδείξετε ότι:

a. Τα μέσα Μ_1, Μ_2, Μ_3, Μ_4 των ευθυγράμμων τμημάτων ΖΗ, ΘΙ, ΚΛ, ΜΕ αντίστοιχα, είναι κορυφές παραλληλογράμμου, που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ, έχει το ίδιο κέντρο και πλευρές κάθετες με τις πλευρές του αντιστοίχου.

b. Οι προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των σημείων Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα πάνω στις ευθείες ΛΖ, ΕΘ, ΗΚ, ΙΜ, είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση



(Σχ. 1)

a. Στο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AB\Delta}}$ η ΑΟ είναι διάμεσος άρα ΟΑ⊥ΛΖ και ΑΓ=ΛΖ (1^{o} θεώρημα Vecten).

Όμοια στο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Gamma B\Delta}}$ η ΓΟ είναι διάμεσος άρα ΟΓ⊥ΚΗ και ΑΓ=ΗΚ, δηλαδή ΛΖ=ΚΗ και ΛΖ//ΚΗ (κάθετες στη ΑΓ στα Α΄ και Γ΄ αντίστοιχα), οπότε το ΛΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή M_1M_3 ενώνει τα μέσα των ΗΖ και ΛΚ αντίστοιχα, θα είναι παράλληλη των ΛΖ, ΚΗ και θα διέρχεται από το μέσον της Α΄Γ΄ που είναι και το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

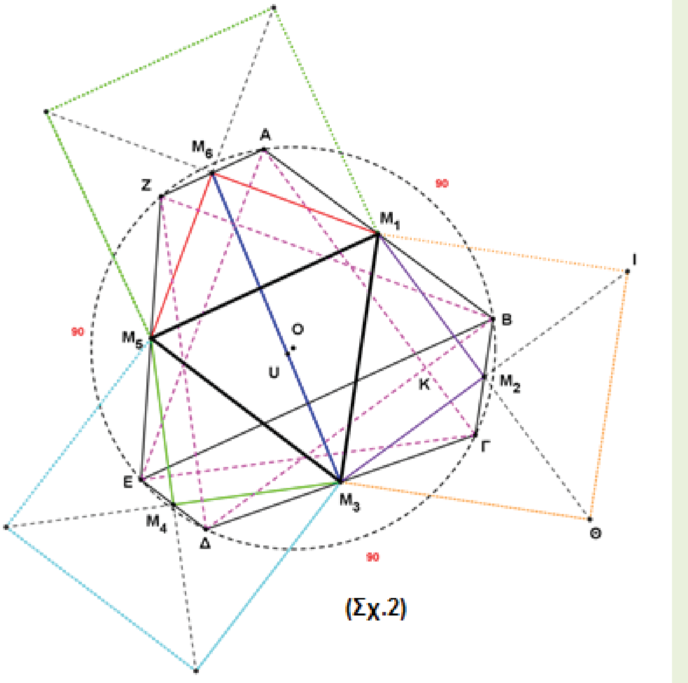
Όμοια για τα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta A\Gamma}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{BA\Gamma}}$ θα είναι ΔΒ κάθετη στις ΕΘ, ΙΜ στα σημεία Β΄ και Δ΄ αντίστοιχα και θα ισχύει ΕΘ=ΒΔ=ΜΙ. Άρα το ΕΘΙΜ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή M_2M_4 ενώνει τα μέσα των ΙΘ και ΕΜ αντίστοιχα, θα είναι παράλληλη των ΜΙ, ΕΘ και θα διέρχεται από το μέσον της Δ΄Β΄ που είναι και το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΑ΄Ζ και ΓΓ΄Κ είναι ίσα (ΑΖ=ΓΚ και $\mathbf{A'\hat{Z}A = \Gamma'\hat{K}\Gamma}$, πλευρές παράλληλες) άρα Α΄Ζ=//ΚΓ΄, οπότε το Α΄ΖΓ΄Κ θα είναι παραλληλόγραμμο άρα οι διαγώνιοι Α΄Γ΄ και ΖΚ διχοτομούνται, και επειδή το Ο είναι το μέσο της Α΄Γ΄ το Ο θα είναι και το κέντρο του παραλληλογράμμου ΛΖΗΚ (ΖΚ διαγώνιος του ΛΖΗΚ), άρα το Ο θα είναι και το μέσο των M_1M_3 και M_2M_4 . Δηλαδή θα είναι $OM_1=OM_3$ και $OM_4=OM_2$ οπότε το $M_1M_2M_3M_4$ είναι παραλληλόγραμμε που το κέντρου συμπίπτει με το κέντρο του ΑΒΓΔ.

Επίσης τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν ίσες διαγώνιες, ΑΓ=ΛΖ= M_1M_3 και ΒΔ=ΕΘ= M_2M_4.

Είναι M_1M_3 ⊥Α΄Γ΄ και M_2M_4⊥Β΄Δ΄, άρα οι γωνίες $\mathbf{M_4\hat{O}M_1}$ και $\mathbf{A\hat{O}\Delta}$ θα είναι ίσες (αν και οι δύο είναι οξείες ή και οι δύο αμβλείες) ή παραπληρωματικές αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Στο σχήμα 1 οι γωνίες $\mathbf{M_4\hat{O}M_1}$, $\mathbf{A\hat{O}\Delta}$ είναι οξείες οπότε τα τρίγωνα ΟΑΔ και OM_1M_4 θα είναι ίσα (δύο πλευρές και περιεχόμενη γωνία) άρα ΑΔ= M_1M_4, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα.



(Σχ.2)

Οι γωνίες $\mathbf{M_4\hat{O}\Delta'}$, $\mathbf{A'\hat{O}M_1}$ είναι ορθές και τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ , $M_1M_2M_3M_4$ είναι ίσα, άρα το παραλληλόγραμμο $M_1M_2M_3M_4$ προκύπτει από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με στροφή γύρο από το κέντρο Ο κατά 90^{o}, οπότε M_3M_4⊥ΑΒ και M_1M_2⊥ΑΔ.

b. Αρκεί οι Α΄Γ΄ και Β΄Δ΄, που διέρχονται από το Ο, να διχοτομούνται. Είναι Α΄Ο=Α΄Α+ΑΟ=Α΄Α+ΟΓ, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι Α΄Α=ΓΓ'. Αυτό ισχύει από την ισότητα των τριγώνων ΑΑ΄Ζ, ΓΓ'Κ. Όμοια Δ΄Ο=ΟΒ΄, άρα το Α'Β'Γ'Δ' θα είναι παραλληλόγραμμο.

2. Θεωρούμε περιφέρεια C(O,R) και τα μη διαδοχικά τόξα της ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ ίσα με 90^{o} το καθένα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, περνάνε από το ίδιο σημείο U.

Λύση

Από την υπόθεση είναι: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{EZ}$ (Σχ. 2).

Είναι $\overset{\frown}{\mathbf{AB\Gamma}}=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}+\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\overset{\frown}{\mathbf{B\Gamma\Delta}}=\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}+\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$, άρα $\overset{\frown}{\mathbf{AB\Gamma}}=\overset{\frown}{\mathbf{B\Gamma\Delta}}$, οπότε ΑΓ=ΒΔ (1). Όμοια ΒΔ=ΓΕ=ΔΖ=ΕΑ=ΖΒ.

Είναι $\mathbf{A\hat{K}B}=\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}+\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}}}{\mathbf{2}}=\mathbf{90^o}$ δηλαδή ΑΓ⊥ΒΔ (2). Όμοια ΓΕ⊥ΖΔ, ΑΕ⊥ΖΒ.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ η M_2M_3 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ άρα $\mathbf{M_2M_3}\ //=\dfrac{\mathbf{B\Delta}}{\mathbf{2}}$ (3).

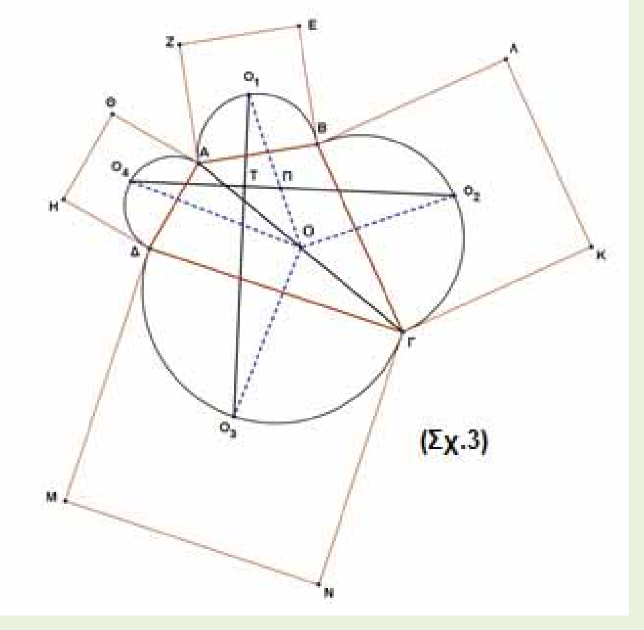
Όμοια στο τρίγωνο ΑΒΓ η M_1M_2 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ άρα $\mathbf{M_1M_2}\ //=\dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$ (4).

Επειδή ΑΓ=ΒΔ και ΑΓ⊥ΒΔ θα είναι και $M_1M_2= M_2M_3$ και $M_1M_2 \perp M_2M_3$, δηλαδή το τρίγωνο $M_1M_2M_3$ θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε το M_2 θα είναι το κέντρο του τετραγώνου με πλευρά την M_1M_3.

Όμοια το M_4 θα είναι το κέντρο του τετραγώνου με πλευρά την M_5M_3 και το M_6 θα είναι το κέντρο του τετραγώνου με πλευρά την M_1M_5.

Στο τρίγωνο $M_1M_3M_5$ τα M_2 , M_4 και M_6 είναι τα κέντρα των τετραγώνων με πλευρές τις M_1M_3, M_3M_5 και M_5M_1 αντίστοιχα του τριγώνου $M_1M_3M_5$, άρα οι M_3M_6, M_1M_4 και M_5M_2 συντρέχουν στο U, (5^o θεώρημα 5 Vecten).

3. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού ημιπεριφέρειες, με διαμέτρους τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Αν O_1, O_2, O_3, O_4 είναι τα μέσα αυτών των ημιπεριφερειών αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι $O_1O_3=O_2O_4$ και $O_1O_3 \perp O_2O_4$.



(Σχ.3)

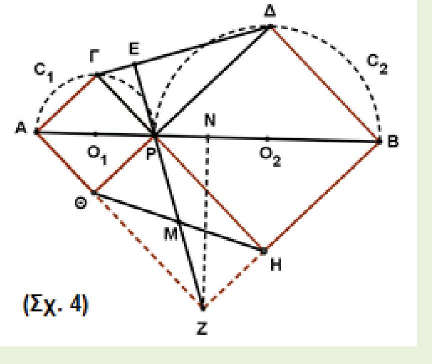
Λύση

Θεωρούμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΚΛ, ΓΔΜΝ και ΑΔΗΘ που έχουν κέντρα τα σημεία O_1, O_2, O_3, O_4 αντίστοιχα.

Έστω Ο το μέσον της ΑΓ, τότε στο τρίγωνο ΒΑΓ θα είναι $\mathbf{O_1\hat{O}O_2=90^o}$ και $OO_1=OO_2$ (1) (7^o θεώρημα Vecten). Όμοια από το τρίγωνο ΑΓΔ θα είναι $\mathbf{O_4\hat{O}O_3=90^o}$ και $OO_4=OO_3$ (2). Τα τρίγωνα O_1OO_3, OO_2O_4 έχουν $OO_1=OO_2$ λόγω (1) $OO_3=OO_4$ λόγω (2) $\mathbf{O_1\hat{O}O_3=O_4\hat{O}O_2}$ (καθεμία είναι $\mathbf{90^o+O_4\hat{O}O_1}$), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $O_1O_3=O_2O_4$ και $\mathbf{O\hat{O}_1O_3=O_4\hat{O}_2O}$.

Τα τρίγωνα $ΤΠO_1$ και $ΟΠO_2$ έχουν δύο γωνίες ίσες, τις $\mathbf{O\hat{O}_1O_3, O_4\hat{O}_2O}$ και $\mathbf{O_1\hat{\Pi}T, O\hat{\Pi}O_2}$ ως κατά κορυφή, άρα θα είναι $\mathbf{O_1\hat{T}\Pi=\Pi\hat{O}O_2=90^o}$.

4. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και μεταβλητό σημείο Ρ πάνω σ' αυτό. Γράφουμε τις ημιπεριφέρειες C_1, C_2 με διαμέτρους αντίστοιχα τα τμήματα ΡΑ, ΡΒ έτσι, ώστε να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΑΒ οι ημιπεριφέρειες. Ονομάζουμε Γ και Δ τα μέσα των C_1 και C_2 αντίστοιχα και φέρνουμε την ΡΕ⊥ΓΔ. Να αποδειχτεί ότι η μεταβλητή ευθεία ΡΕ περνάει από σταθερό σημείο.



(Σχ. 4)

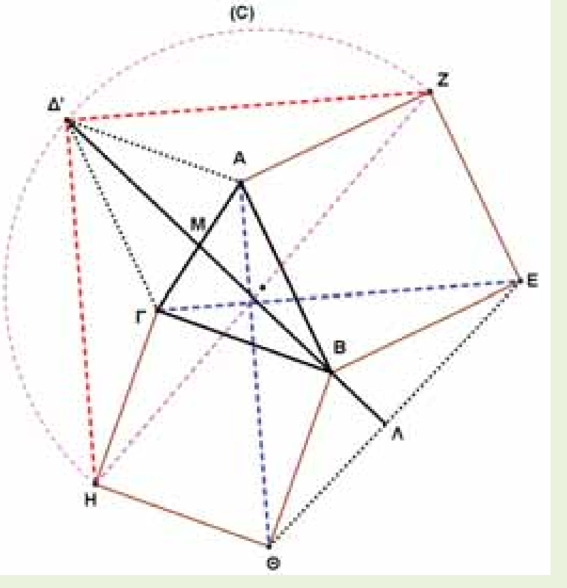
Λύση

Θεωρούμε το τρίγωνο ΡΓΔ και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΓΡΘΑ, ΡΔΒΗ (Σχ. 4). Επειδή τα σημεία Γ, Δ είναι μέσα των ημιπεριφερειών C_1, C_2 τα τρίγωνα ΑΓΡ, ΡΔΒ θα είναι ορθογώνια και ισοσκελή οπότε

$\hat{\mathrm{AP\Gamma}} = \hat{\mathrm{BP\Delta}} = 45^o$, άρα $\hat{\mathrm{\Gamma P\Delta}} = \hat{\mathrm{\Theta PH}} = 90^o$. Επειδή ΡΕ⊥ΓΔ, η ΡΕ θα διέρχεται από το μέσον της ΘΗ. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΡΗΖΘ το οποίο θα είναι ορθογώνιο, διότι έχει μία γωνία ορθή, άρα η ΡΜ θα διέρχεται από το Ζ. Θα αποδείξουμε ότι το Ζ είναι σταθερό σημείο.

Τα τρίγωνα ΑΡΘ, ΡΗΒ είναι ορθογώνια και ισοσκελή, άρα $\hat{\mathrm{PA\Theta}} = \hat{\mathrm{PBH}} = 45^o$ οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ θα είναι και ισοσκελές. Έστω ΖΝ η απόσταση του Ζ από την ΑΒ, τότε η ΖΝ θα είναι μεσοκάθετος της ΑΒ και $\mathrm{ZN} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ που είναι σταθερό (1ο θεώρημα Vecten) .

5. **Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΒΓΗΘ. Με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ γράφουμε την ημιπεριφέρεια (C) που βρίσκεται προς το μέρος της πλευράς ΑΓ. Αν Δ είναι το μέσον της ημιπεριφέρειας (C) να αποδειχτεί ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.**



Λύση

Έστω Μ το μέσον της ΑΓ τότε ΒΜ⊥ΘΕ και $\mathrm{BM} = \dfrac{\Theta\mathrm{E}}{2}$ (1ο θεώρημα Vecten). Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ' και θα αποδείξουμε ότι το Δ ταυτίζεται με το Δ'.

Είναι ΑΘ⊥ΓΕ και ΑΘ=ΓΕ (3ο θεώρημα Vecten).

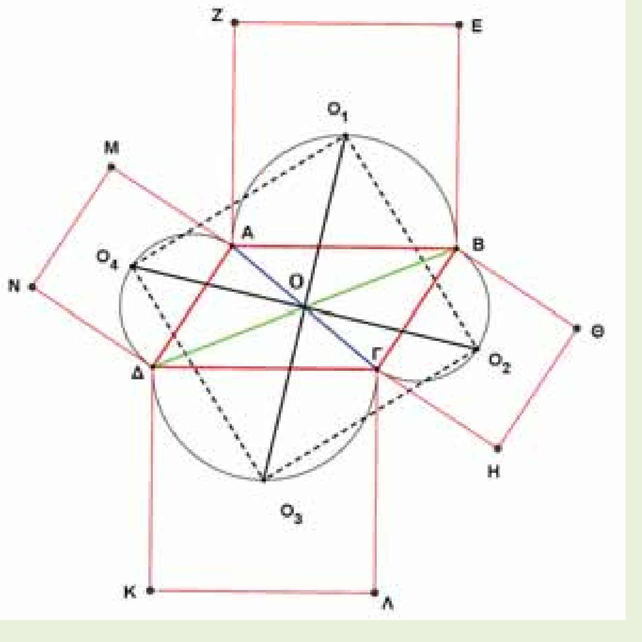
Αρκεί να αποδείξουμε ότι Δ' Η//=ΑΘ και Δ' Ζ//=ΓΕ.

Είναι Δ'Α//=ΓΒ//=ΗΘ, άρα Δ΄ΑΘΗ παραλληλόγραμμο, οπότε Δ΄Η//=ΑΘ. Όμοια Δ΄Ζ//=ΓΕ, οπότε Δ' Ζ//=ΓΕ, άρα Δ΄Η=Δ΄Ζ και Δ΄Η⊥Δ΄Ζ, δηλαδή $\hat{\mathrm{H\Delta' Z}} = 90^o$, οπότε το Δ' βρίσκεται στην ημιπεριφέρεια (C) και επειδή Δ΄Η=Δ΄Ζ το Δ΄ μέσο του (C), άρα το Δ ταυτίζεται με το Δ' .

6. **Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις ημιπεριφέρειες που φτιάχνονται εξωτερικά αυτού με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Αν O_1, O_2, O_3 και O_4 είναι τα μέσα αυτών των ημιπεριφερειών αυτών αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο $O_1O_2O_3O_4$ είναι τετράγωνο.**

Λύση

Τα μέσα O_1, O_2, O_3, O_4 των ημιπεριφερειών είναι κέντρα των τετραγώνων ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΚΛ και ΑΔΝΜ αντίστοιχα. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ο είναι το μέσον της ΑΓ, άρα (7ο θεώρημα Vecten) το τρίγωνο O_1O_2 Ο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $\hat{O_1OO_2} = 90^o$ και $OO_1=OO_2$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ, επειδή το Ο είναι το μέσον της ΒΔ το τρίγωνο O_2O_3O θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και θα έχουμε

$$\hat{O_2OO_3} = 90^o \text{ και } OO_2=OO_3 \text{ (2).}$$

Όμοια $\hat{O_3OO_4} = 90^o$ και $OO_3=OO_4$ και $\hat{O_4OO_1} = 90^o$ και $OO_4=OO_1$ (3).

Από τις (1), (2), (3) στο τετράπλευρο $O_1O_2O_3O_4$ οι διαγώνιες διχοτομούνται κάθετα και είναι και ίσες, άρα είναι τετράγωνο.