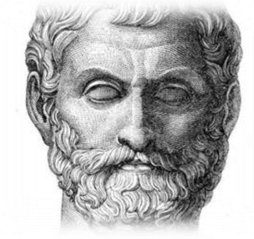
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
« Ο ΘΑΛΗΣ »



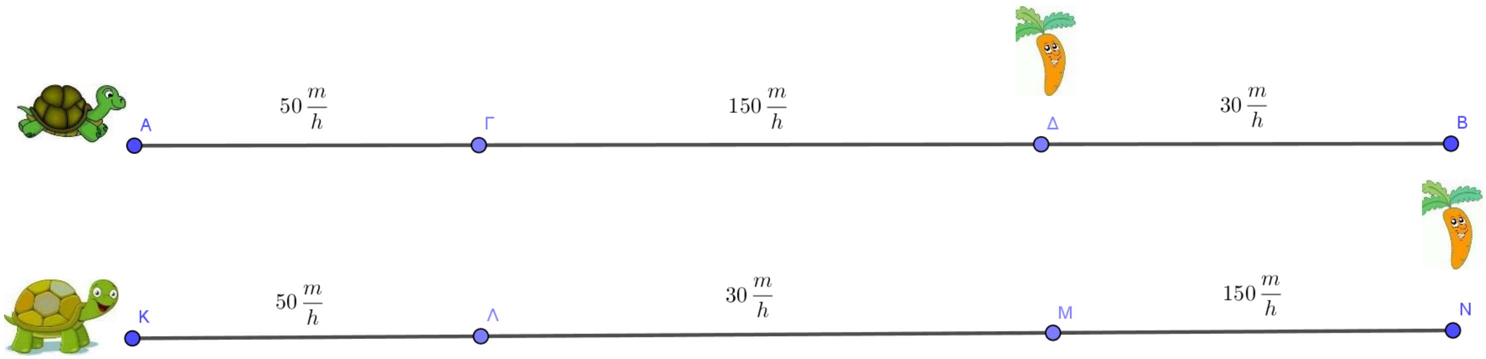
Γ' Γυμνασίου

ΠΑΤΡΑ 01 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ2021

Αγαπητοί μαθητές, στον διαγωνισμό της ΕΜΕ "Ο ΘΑΛΗΣ" που θα γίνει στο σχολείο την Παρασκευή 5/11/2021 θα διαγωνιστείτε σε τρία θέματα, εμείς θέλοντας να σας βοηθήσουμε κάνοντας μια επιπλέον εξάσκηση σας βάλαμε τέσσερα ισοδύναμα θέματα.

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 5)

ΔΥΟ ΧΕΛΩΝΕΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΚΑΡΟΤΑ



Δύο χελωνίτσες διανύουν δύο δρόμους που έχουν το ίδιο μήκος. Η πρώτη χελώνα ξεκινά χαρούμενη με ταχύτητα 50 m/h. Όταν φτάνει στο σημείο Γ βλέπει ότι υπάρχει ένα καρότο στο σημείο Δ οπότε πεινασμένη καθώς είναι, αρχίζει να τρέχει με ταχύτητα 150 m/h, για να φάει το καρότο. Αφού τελειώσει το γεύμα της, το οποίο διαρκεί μισή ώρα, βαρυστομαχιασμένη, περπατά αργά με ταχύτητα 30 m/h μέχρι το τέλος της διαδρομής.

Η δεύτερη χελωνίτσα ξεκινά κι αυτή κεφάτη, με ταχύτητα 50 m/h, όμως στο σημείο Λ κουράζεται και αρχίζει να βαδίζει αργά με ταχύτητα 30 m/h. Μόλις φτάνει στο σημείο Μ βλέπει ότι υπάρχει ένα καρότο στο σημείο Ν , οπότε βάζοντας τα δυνατά της να φτάσει όσο το δυνατόν γρηγορότερα, τρέχει με ταχύτητα 150 m/h ως το τέλος της διαδρομής.

Αν η πρώτη χελωνίτσα χρειάστηκε 3 ώρες για να πάει από το Α στο Β και η δεύτερη χρειάστηκε 3.2 ώρες για να πάει από το Κ στο Ν, πόσα μέτρα ήταν η διαδρομή;

(Δίνεται ότι ΑΓ=ΚΛ, ΓΔ=ΛΜ και ΔΒ=ΜΝ).

Λύση

Έστω ΑΓ = ΚΛ = α μέτρα , ΓΔ = ΛΜ = β μέτρα, ΔΒ = ΜΝ = γ μέτρα.

Για τη πρώτη χελώνα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{50}+\frac{\beta}{150}+\frac{\gamma}{30}=3-\frac{1}{2}=2,5 \text{ h} \quad (1).$$

Για τη δεύτερη χελώνα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{50}+\frac{\beta}{30}+\frac{\gamma}{150}=3,2 \text{ h} \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$$\frac{2\alpha}{50}+\frac{\beta}{150}+\frac{\beta}{30}+\frac{\gamma}{30}+\frac{\gamma}{150}=5,7$$

Άρα: $\frac{\alpha}{25}+\frac{6\beta}{150}+\frac{6\gamma}{150}=5,7$ Απλοποιώντας τα κλάσματα έχουμε: $\frac{\alpha}{25}+\frac{\beta}{25}+\frac{\gamma}{25}=5,7$

Επομένως: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{25}=5,7$. Άρα η απόσταση της διαδρομής είναι $\alpha+\beta+\gamma=5,7\cdot 25=142,5$ μέτρα.

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\frac{1}{1+5^{-2021}}+\frac{1}{1+5^{-2020}}+\frac{1}{1+5^{-2019}}+\ldots+\frac{1}{1+5^{-1}}+\frac{1}{1+5^{1}}\,\frac{1}{1+5^{2}}+\ldots+\frac{1}{1+5^{-2020}}+\frac{1}{1+5^{2021}}$$

Λύση

Ομαδοποιούμε τους προσθετέους σε ζεύγη και έχουμε:

$$A=\left(\frac{1}{1+5^{-2021}}+\frac{1}{1+5^{2021}}\right)+\left(\frac{1}{1+5^{-2020}}+\frac{1}{1+5^{2020}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1+5^{-1}}+\frac{1}{1+5^{1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{5^{2021}}}+\frac{1}{1+5^{2021}}\right)+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{5^{2020}}}+\frac{1}{1+5^{2020}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{5^{1}}}+\frac{1}{1+5^{1}}\right)=$$

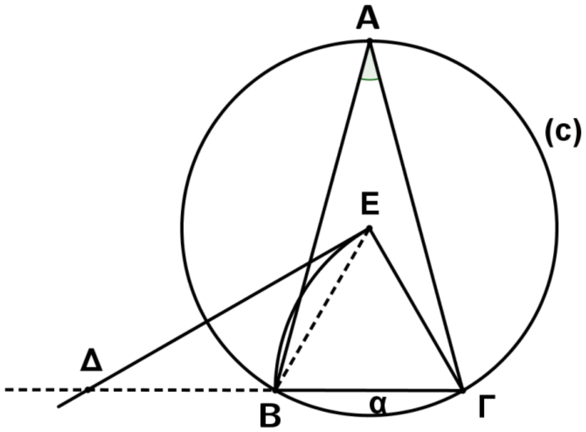
$$=\left(\frac{5^{2021}}{5^{2021}+1}+\frac{1}{1+5^{2021}}\right)+\left(\frac{5^{2020}}{5^{2020}+1}+\frac{1}{1+5^{2020}}\right)+\ldots+\left(\frac{5^{1}}{5^{1}+1}+\frac{1}{1+5^{1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{5^{2021}+1}{5^{2021}+1}\right)+\left(\frac{5^{2020}+1}{5^{2020}+1}\right)+\ldots+\left(\frac{5^{1}+1}{5^{1}+1}\right)=1+1+1+\ldots+1=2021.$$

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 5)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=α και $\hat{A} = 30^o$. Θεωρούμε τον κύκλο (c) που διέρχεται από τις κορυφές του και έχει κέντρο το σημείο Ε. Θεωρούμε την ημιευθεία η οποία είναι κάθετη στην ΕΓ στο σημείο Ε και τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Δ. Θεωρούμε επίσης τον κυκλικό τομέα που γράφεται με κέντρο του Γ και ακτίνα ΓΕ (Σχ. 1).

- **I.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΒ
- **II.** Να υπολογίσετε την ΔΕ συναρτήσει της πλευράς α
- **III.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς α.
- **IV.** Αν Ζ είναι το σημείο τομής του τόξου $\overset{\frown}{BE}$ με την ΑΒ να αποδείξετε ότι ΖΒ=ΖΕ.



(Σχ. 1)

Λύση

I. Για να υπολογίσω τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΒ, θα πρέπει να αξιοποιήσω τα δεδομένα μου. Μου δίνει ότι η γωνία Α του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι 30^0. Εγώ γνωρίζω ότι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, δηλ. $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ (1).
Ξέρω ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^0.

Άρα $\hat{A} + A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$30^o + 2A\hat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{B}\Gamma = 180^o - 30^o \Leftrightarrow 2A\hat{B}\Gamma = 150^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = \frac{150^o}{2} = 75^o.$$

Επειδή η $\widehat{A}$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο με κέντρο Ε και είναι 30^0, το αντίστοιχο τόξο της $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60^o$ (το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας είναι το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της).

Η $\widehat{\mathrm{BE\Gamma}}$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60^o$, άρα $\widehat{\mathrm{BE\Gamma}} = 60^0$ (το μέτρο κάθε επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της).
Επειδή το Ε είναι το κέντρο του κύκλου θα έχω ΕΑ=ΕΒ=ΕΓ (ακτίνες κύκλου).
Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με ΕΒ=ΕΓ και τη γωνία της κορυφής $\widehat{\mathrm{BE\Gamma}} = 60^0$.
Άρα τελικά θα είναι ισόπλευρο και θα έχω $\widehat{\mathrm{EB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{E\Gamma B}} = 60^0$.
Έχω $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{AB\Gamma}} - \widehat{\mathrm{EB\Gamma}} = 75^0 - 60^0 = 15^0$ και επειδή ΕΒ=ΕΑ το τρίγωνο ΕΒΑ θα είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{\mathrm{EAB}} = 15^0$.

Όμως στο τρίγωνο ΑΕΒ έχω:

$\widehat{\mathrm{ABE}} + \widehat{\mathrm{EAB}} + \widehat{\mathrm{BEA}} = 180^0 \iff 15^0 + 15^0 + \widehat{\mathrm{BEA}} = 180^0 \iff$

$30^0 + \widehat{\mathrm{BEA}} = 180^0 \iff \widehat{\mathrm{BEA}} = 150^0$.

II. Θέλω να υπολογίσω την ΔΕ. Αυτή είναι κάθετη πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ ($\widehat{\Delta\mathrm{E}\Gamma} = 90^0$ από υπόθεση).

Επειδή το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο θα έχω ΒΓ=ΒΕ=**ΕΓ=α.**

Θέλω να βρω την ΔΓ.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ έχω:

$\widehat{\mathrm{E}\Delta\Gamma} = 180^0 - \widehat{\Delta\mathrm{E}\Gamma} - \widehat{\mathrm{E}\Gamma\Delta} \iff$

$\widehat{\mathrm{E}\Delta\Gamma} = 180^0 - 90^0 - 60^0 \iff \boldsymbol{\widehat{\mathrm{E}\Delta\Gamma} = 30^0}$.

Επίσης $\widehat{\Delta\mathrm{EB}} = \widehat{\Delta\mathrm{E}\Gamma} - \widehat{\mathrm{BE}\Gamma} \iff$

$\widehat{\Delta\mathrm{EB}} = 90^0 - 60^0 \iff \boldsymbol{\widehat{\Delta\mathrm{EB}} = 30^0}$.

Άρα ΔΒΕ τρίγωνο ισοσκελές με **ΔΒ=ΒΕ=α.**

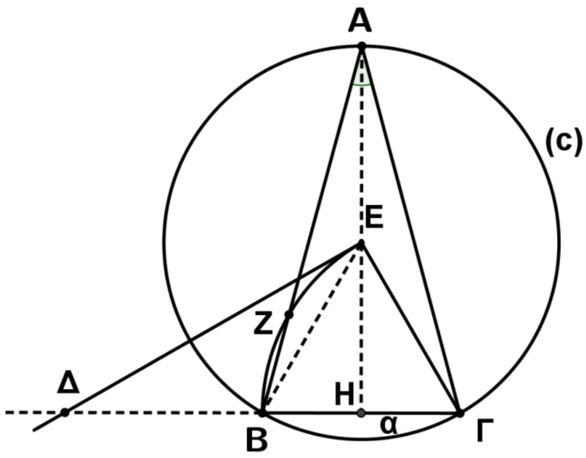
ΔΓ=ΔΒ+ΒΓ=α+α=**2α.**

Επομένως (Σχ. 2):

$\Delta\Gamma^2 = \Delta\mathrm{E}^2 + \mathrm{E}\Gamma^2 \iff$

$\Delta\mathrm{E}^2 = \Delta\Gamma^2 - \mathrm{E}\Gamma^2 \iff \Delta\mathrm{E}^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2 \iff \Delta\mathrm{E}^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 \iff$

$\Delta\mathrm{E}^2 = 3\alpha^2 \iff \Delta E = \sqrt{3\alpha^2} \iff \boldsymbol{\Delta\mathrm{E} = \alpha\sqrt{3}}$.



(Σχ. 2)

III. Για να υπολογίσω το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ αρκεί να ξέρω τη βάση του ΒΓ και το αντίστοιχο ύψος. Έχω ΒΓ=α. Το ύψος δεν το ξέρω.

Επειδή ξέρω ότι ΑΒ=ΑΓ και ΕΒ=ΕΓ, δηλ. τα σημεία Α και Ε ισαπέχουν από τα άκρα της ΒΓ, αυτά θα ανήκουν στη μεσοκάθετή της.

Επομένως αν φέρω την ΑΕ και την προεκτείνω και αυτή τμήσει την ΒΓ στο σημείο Η, η ΑΗ θα είναι κάθετη στη ΒΓ δηλ. ύψος.

ΑΗ=ΑΕ+ΕΗ, όπου ΑΕ=α και ΕΗ=το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου ΕΒΓ πλευράς α.

Άρα ΕΗ= $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

$\mathrm{E}_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\Gamma \cdot \mathrm{AH} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (\mathrm{AE} + \mathrm{EH}) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\alpha^2$.

IV. $\widehat{\mathrm{E}\Gamma\mathrm{B}} = 60^0$ και επειδή είναι επίκεντρη στο κύκλο με κέντρο το Γ θα έχω $\overset{\frown}{EB} = 60^o$.

$\widehat{\mathrm{ZBE}} = 15^0$ και είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο με κέντρο το Γ και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ZE}$.

Άρα $\overset{\frown}{ZE} = 30^o$. Οπότε $\overset{\frown}{ZE} = \overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{ZE} = 60^o - 30^o = 30^o$.

$\hat{ZEB} = \frac{\overset{\frown}{ZB}}{2} = \frac{30^o}{2} = 15^o$. Δηλ. $\widehat{\mathrm{ZBE}} = \widehat{\mathrm{ZEB}} = 15^0$.

Άρα ΖΒΕ τρίγωνο ισοσκελές και επομένως **ΖΒ=ΖΕ.**

Πρόβλημα 4 (Μονάδες 5)

Μια πωλήτρια θέλει να τοποθετήσει σε ένα ράφι 9 κουτιά σχήματος κύβου έτσι ώστε να δημιουργήσει κάποιες στήλες με το ίδιο ύψος. Τα κουτιά που έχει είναι:
1 κουτί α με ύψος 11 cm, 1 κουτί β με ύψος 14 cm, 4 κουτιά γ με ύψος 10 cm και 3 κουτιά δ με ύψος 15 cm. Μπορείτε να την βοηθήσετε ώστε να φτιάξει κάποιες στήλες με το ίδιο ύψος;

Λύση

Έστω x οι στήλες που θα δημιουργήσουμε, τότε το ύψος κάθε στήλης θα είναι:

$$\frac{\alpha+\beta+4\gamma+3\delta}{x}=\frac{11+14+4\cdot 10+3\cdot 15}{x}=\frac{110}{x}cm.$$

Είναι 110=2·5·11, οπότε το x θα είναι διαιρέτης του 110, δηλαδή το x θα είναι 2 ή 5 ή 11 ή 10 ή 22 ή 55. Επειδή έχουμε συνολικά 9 κουτιά δεν μπορούμε να φτιάξουμε στήλη με περισσότερα από 9 κουτιά. Άρα το x δεν μπορεί να είναι 11 ή 10 ή 22 ή 55 (στήλες), οπότε x=2 ή x=5.

Αν x=2 (στήλες) τότε η κάθε στήλη θα έχει ύψος 55 cm και μπορεί να σχηματιστεί από τα κουτιά (3δ, γ) και (3γ, α, β).

Αν x=5 (στήλες) τότε η κάθε στήλη θα έχει ύψος 22 cm και δεν μπορεί να σχηματιστεί από τα κουτιά που έχουμε. Άρα υπάρχει μοναδικός τρόπος σχηματισμού με 2 στήλης.

Τα παραπάνω προβλήματα είναι μία πρόταση της επιτροπής θεμάτων του Παραρτήματος Αχαΐας από τους συναδέλφους :

Αλεξοπούλου Νανά, Γιαννίση Μαρία, Γκουνέλα Μαρία, Κάββουρα Τάκη, Καλιακούδα Φωτεινή, Καραβότα Δημήτρη, Καραμπέρη Γιάννη, Καρτέρη Σταυρούλα, Μπατέλη Γιώργο, Μπατέλη Χρήστο, Συκιώτη Ελεάνα, Τσιλίρα Αθηνά.

Όποιος συνάδελφος επιθυμεί μπορεί να συμμετέχει στέλνοντας ανάλογα θέματα.