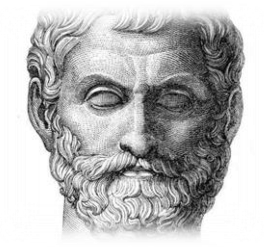
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
« Ο ΘΑΛΗΣ »



Γ' Γυμνασίου

ΠΑΤΡΑ 18 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2021

Πρόβλημα 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2209 \cdot \frac{-2021^{-2}}{(-43)^{-2}} + \frac{(-47)^{-1}}{2021^{-1}} - \left(-828 \cdot \frac{(-2022)^{-2}}{337^{-2}}\right) : \left(\frac{86^{3} \cdot 86^{-8} \cdot 86^{5}}{86}\right) + \frac{29}{3^{-1}}$$

Λύση

Παρατηρήστε ότι: $2021 : 43 = 47$ *και* $2022 : 337 = 6$. Εκτελώντας προσεχτικά τις πράξεις και αναμένοντας κάποια απλοποίηση για το 2209 έχουμε:

$$A = -2209 \cdot \left(\frac{2021}{-43}\right)^{-2} + \left(\frac{-47}{2021}\right)^{-1} - \left(-828 \cdot \left(\frac{-2022}{337}\right)^{-2}\right) : \left(\frac{86^{3-8+5}}{86}\right) + \frac{29}{\frac{1}{3}}$$

$$= -2209 \cdot (-47)^{-2} + \left(\frac{-1}{43}\right)^{-1} - \left(-828 \cdot (-6)^{-2}\right) : \left(\frac{86^{0}}{86}\right) + 29 \cdot 3$$

$$= -2209 \cdot \frac{1}{(-47)^{2}} + (-43) - \left(-828 \cdot \frac{1}{(-6)^{2}}\right) : \frac{1}{86} + 87$$

$$= -2209 \cdot \frac{1}{2209} - 43 - \left(-828 \cdot \frac{1}{36}\right) \cdot 86 + 87$$

$$= -1 - 43 - (-23) \cdot 86 + 87$$

$$= -44 + 1978 + 87$$

$= -44 + 2065 = 2021$.

Πρόβλημα 2ο

Δύο ίδιες δεξαμενές νερού δέχονται νερό από δύο διαφορετικές βρύσες. Η πρώτη δεξαμενή γεμίζει σε 10 λεπτά ενώ η δεύτερη σε 20 λεπτά. Τι ώρα θα πρέπει να ανοίξουμε συγχρόνως και τις δύο βρύσες ώστε στις 10 π.μ. το ύψος της πρώτης δεξαμενής που υπολείπεται για να γεμίσει να είναι ίσο με τα $\frac{1}{3}$ του ύψους του νερού της δεύτερης δεξαμενής που υπολείπεται για να γεμίσει.

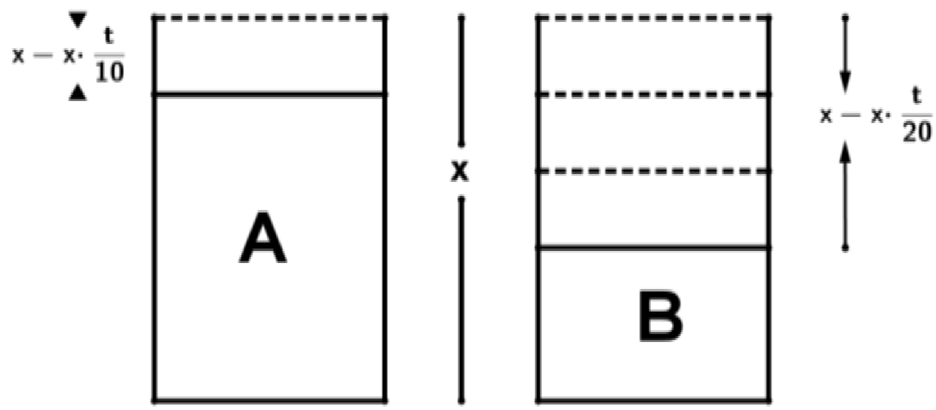
(αντίστοιχη στον Ευκλείδη Α τεύχος 111 Στέφανος Κεϊσογλου)

Λύση

Έστω x το ύψος των δεξαμενών.
Για την πρώτη δεξαμενή θα έχουμε:
Η βρύση στο κάθε λεπτό θα γεμίζει $\frac{1}{10}x = \frac{x}{10}$, οπότε σε t λεπτά θα έχει γεμίσει τα $t \cdot \frac{x}{10}$ της δεξαμενής και θα έχουν απομείνει τα $x - t \cdot \frac{x}{10}$.
Για την δεύτερη δεξαμενή θα έχουμε:
Η βρύση στο κάθε λεπτό θα γεμίζει $\frac{1}{20}x = \frac{x}{20}$, οπότε σε t λεπτά θα έχει γεμίσει τα $t \cdot \frac{x}{20}$ της δεξαμενής και θα έχουν απομείνει τα $x - t \cdot \frac{x}{20}$.
Από τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε:

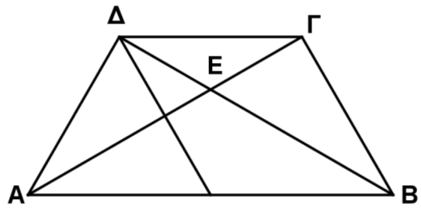
$$x - t \cdot \frac{x}{10} = \frac{1}{3}\left(x - t \cdot \frac{x}{20}\right) \Leftrightarrow x - t \cdot \frac{x}{10} = \frac{1}{3}x - t \cdot \frac{x}{60} \Leftrightarrow 60 - 6t = 20 - t \Leftrightarrow 40 = 5t$$

$\Leftrightarrow t = 8$ λεπτά.
Άρα θα πρέπει να ανοίξω τις βρύσες στις **09:52.**



Πρόβλημα 3ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ>ΓΔ) τέτοιο ώστε ΑΔ=ΔΓ=4 cm και ΑΒ=2ΑΔ. Έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του και Ζ το μέσον της ΑΒ.



(Σχ. 1)

i. Να αποδείξετε ότι ΔΖ⊥ΑΓ

ii. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B E \Gamma}$

iii. Αν οι ΑΔ και ΒΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Μ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ.

Λύση

i. Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές θα είναι ΑΔ=ΓΒ και αφού από την υπόθεση έχω ΑΔ=ΔΓ=4 cm, τελικά ΑΔ=ΔΓ=ΒΓ=4 cm. (1)

Επειδή ΑΒ=2ΑΔ και Ζ είναι το μέσον της ΑΒ θα είναι **ΑΖ=ΖΒ=**$\boldsymbol{\frac{AB}{2}}$**=ΑΔ** ***και*** λόγω της (1) θα είναι ΑΖ=ΖΒ=ΑΔ=ΔΓ=ΓΒ (Σχ. 1).

Είναι ΑΖ=//ΔΓ άρα ΑΖΓΔ παραλληλόγραμμο και επειδή ΑΔ=ΔΓ θα είναι ρόμβος (Σχ. 2).

Επειδή το ΑΖΓΔ είναι ρόμβος θα είναι ΑΔ=ΔΓ=ΓΖ=ΑΖ (2).

Ξέρουμε ότι στον ρόμβο οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, άρα ΔΖ⊥ΑΓ.

ii. Είναι ΔΓ=//ΖΒ άρα το ΔΓΒΖ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή ΔΓ=ΓΒ=4 cm θα είναι ρόμβος, άρα ΔΓ=ΓΒ=ΒΖ=ΖΔ (3).

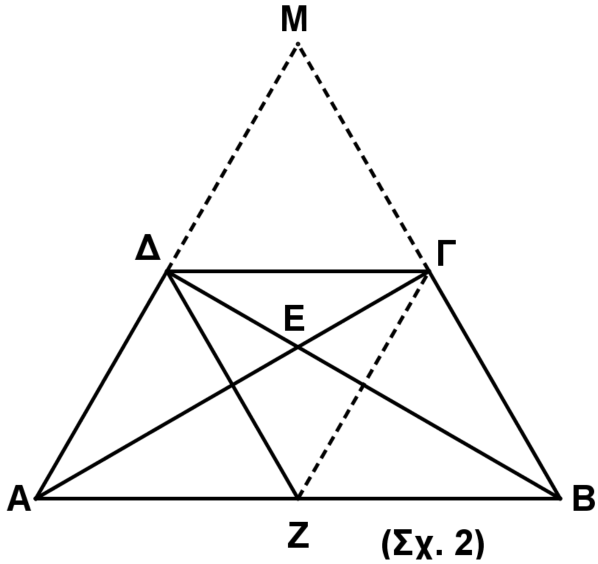
Από (2) και (3) έχω ΔΖ=ΑΖ=ΑΔ, οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο, άρα $\hat{A} = 60^o$.

Από την (2) και (3) θα έχουμε ΓΖ=ΓΒ=ΖΒ, οπότε το τρίγωνο ΓΖΒ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B} = 60^o = \hat{A}$.

Ξέρουμε ότι στον ρόμβο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του (είναι άξονες συμμετρίας).

Στο ρόμβο ΑΖΓΔ η ΑΓ είναι διαγώνιος και η γωνία $\hat{A} = 60^o$, άρα θα είναι $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta = 30^{\,o}$ (4).

Όμοια στο ρόμβο ΔΓΒΖ η ΔΒ είναι διαγώνιος και η γωνία $\hat{B} = 60^o$, άρα θα είναι $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma = 30^{\,o}$ (5).



(Σχ. 2)

Στο τρίγωνο ΑΒΕ η γωνία $B\hat{E}\Gamma$ είναι εξωτερική άρα θα είναι:

$$B\hat{E}\Gamma = E\hat{A}B + E\hat{B}A \overset{(4),(5)}{=} 30^{\,o} + 30^{\,o} = 60^{\,o} \ .$$

iii. Το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισόπλευρο, διότι $\hat{A} = \hat{B} = 60^{\,o}$, (άρα και $\hat{M} = 60^{\,o}$) με πλευρές ΑΜ=ΜΒ=ΑΒ=8 cm.

Ξέρουμε ότι το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, όπου α η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου.

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΜΑΒ είναι α=ΑΒ=8 cm, άρα θα είναι:

$$(MAB) = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

Πρόβλημα 4^o

Στο διπλανό πρόβλημα πολλαπλασιασμού τα ψηφία Α, Β, Γ και Δ είναι διαφορετικοί αριθμοί.

$$\begin{array}{cccc} & & A & B \\ \times & & B & A \\ \hline & 4 & 0 & 8 \\ 5 & \Delta & \Delta & \\ \hline \Gamma & 8 & \Delta & 8 \end{array}$$

i. Να αποδείξετε ότι Α<Β

ii. Να βρείτε τους Α, Β, Γ, Δ.

Λύση

i. Είναι AxAB=408 και BxAB=5ΔΔ, άρα B>A.

ii. Είναι 408=AxAB, άρα το A διαιρεί το 408.

408	2
204	2
102	2
51	3
17	

Άρα A= 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 6 ή 8. Το A δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 1, 2, 3, 4 διότι το γινόμενο AxAB θα δίνει αριθμό <408.
Άρα A=6 ή A=8.
Αν A=6 τότε θα πρέπει 6x6B=408. Επειδή το τελευταίο ψηφίο του 408 είναι το 8, θα πρέπει το B =8 (6x69=414) , άρα A=6 και B=8.
Εύκολα θα είναι Δ=4 και Γ=5.
Υπάρχουν και άλλοι τρόποι λύσης.