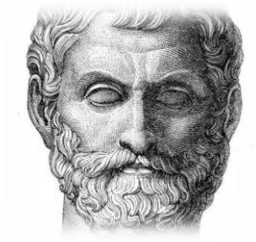
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
« Ο ΘΑΛΗΣ »



Β' Γυμνασίου

ΠΑΤΡΑ 18 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2021

Πρόβλημα 1

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\beta=-2^{-2}$ και $\gamma=\frac{17^2}{-51^2}$.

i) Να υπολογίσετε τον αριθμό $\delta=-2\alpha^2+4\beta-108\gamma$.

ii) Αν $\delta>0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^5$ και $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Λύση

Είναι $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$, $\beta=-2^{-2}=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$ και

$$\gamma=\frac{17^2}{-51^2}=-\frac{17^2}{51^2}=-\left(\frac{17}{51}\right)^2=-\left(\frac{17\cdot 1}{17\cdot 3}\right)^2=-\left(\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{1}{9}$$

Άρα είναι $\boxed{\alpha=-2}$, $\boxed{\beta=-\frac{1}{4}}$ και $\boxed{\gamma=-\frac{1}{9}}$

i) Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό δ. Πράγματι, θα είναι:

$$\delta=-2\cdot(-2)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-108\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=-2\cdot 4-\frac{4}{4}+\frac{108}{9}$$
$$=-8-1+12=-9+12=3$$

Άρα $\boxed{\delta=3}$

ii) Ο αριθμός $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^5$ είναι αρνητικός διότι το πηλίκο $\frac{\alpha}{\delta}$ έχει ετερόσημους όρους ($\alpha < 0, \delta > 0$) και ο εκθέτης είναι περιττός. Ο αριθμός $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$ είναι θετικός αφού οι όροι του κλάσματος είναι ομόσημοι ($\beta < 0,\ \gamma < 0$). Άρα θα ισχύει $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^5 < \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$ αφού κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό.

Σχόλιο: *Παρατηρούμε ότι το ερώτημα μπορεί να λυθεί χωρίς τον υπολογισμό του αριθμού δ.*

Πρόβλημα 2

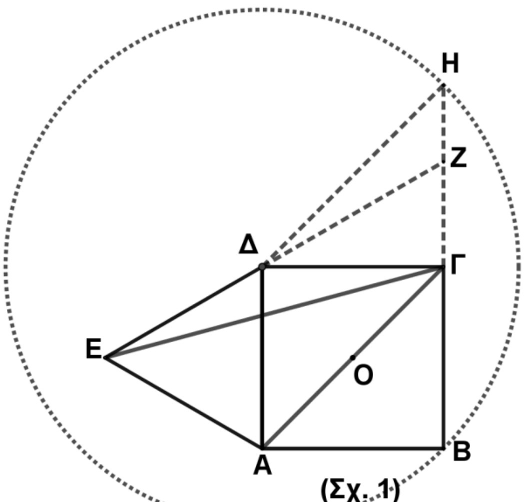
Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, το ΑΔΕ ισόπλευρο τρίγωνο και το Ο είναι το μέσον της ΑΓ.

Ο κύκλος κέντρου Δ και ακτίνας ΔΒ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Η. Η Προέκταση της ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ζ.

i) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E\Gamma A}$.

ii) Να αποδείξετε ότι ΕΟ μεσοκάθετος της ΓΒ.

iii) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{H\Delta Z}$.

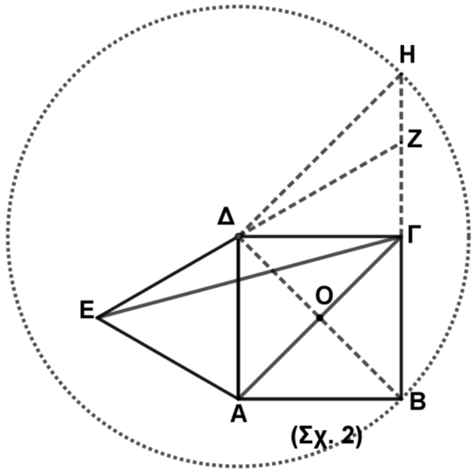


(Σχ. 1)

Λύση

i) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το ΑΔΕ ισόπλευρο τρίγωνο θα έχουμε: ΑΒ=ΔΓ=ΕΔ, άρα το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές. Είναι $\hat{E\Delta\Gamma} = \hat{E\Delta A} + \hat{A\Delta\Gamma} = 60^o + 90^o = 150^o$ *οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΔΓ θα είναι* $\hat{\Delta E\Gamma} = \hat{E\Gamma\Delta} = \frac{180^o - 150^o}{2} = 15^o$ *(1).*

Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και η ΑΓ είναι διαγώνιός του άρα $\widehat{\textbf{ΒΓΑ}} = \widehat{\textbf{ΑΓΔ}} = \textbf{45}^{o}$ *(2).*



Από τα παραπάνω θα είναι

$$\widehat{ΕΓΑ} = \widehat{ΑΓΔ} - \widehat{ΕΓΔ} \overset{(2),(1)}{=} 45^{o} - 15^{o} = 30^{o}.$$

ii) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο οι διαγώνιοί του είναι ίσοι και διχοτομούνται άρα θα είναι

ΟΔ=ΟΒ=ΟΑ=ΟΓ (3).

Επίσης το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές άρα ΕΑ=ΕΔ (4).

Από τις (3) και (4) θα είναι $\left.\begin{matrix} \textbf{ΕΑ} = \textbf{ΕΔ} \\ \textbf{ΟΔ} = \textbf{ΟΑ} \end{matrix}\right\}$ *άρα η ΕΟ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ και λόγω του τετραγώνου ΑΒΓΔ θα είναι και μεσοκάθετος της ΒΓ.*

iii) Το τρίγωνο ΔΒΗ είναι ισοσκελές (ΔΒ=ΔΗ ως ακτίνες του κύκλου) και επειδή ΔΓ⊥ΒΗ (ΔΓ κάθετη στην ΒΗ) το Γ θα είναι το μέσον της ΒΗ, οπότε ΒΓ=ΓΗ=ΔΓ (λόγω του τετραγώνου ΑΒΓΔ).

Το τρίγωνο ΔΓΗ είναι ορθογώνιο ($\widehat{\textbf{ΔΓΗ}} = \textbf{90}^{o}$) *και ισοσκελές (ΓΔ=ΓΗ) άρα* $\widehat{\textbf{ΓΔΗ}} = \widehat{\textbf{ΓΗΔ}} = \textbf{45}^{o}$ *(5).*

Είναι:

$$\widehat{ΕΔΓ} = \widehat{ΕΔΑ} + \widehat{ΑΔΓ} = 60^{o} + 90^{o} = 150^{o}, \quad \textit{οπότε} \quad \widehat{ΖΔΓ} = 180^{o} - 150^{o} = 30^{o},$$

άρα $\widehat{\textbf{ΗΔΖ}} = \widehat{\textbf{ΗΔΓ}} - \widehat{\textbf{ΖΔΓ}} = \textbf{45}^{o} - \textbf{30}^{o} = \textbf{15}^{o}$.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί 6, 8, 9.

i) Χρησιμοποιώντας και τους τρεις αριθμούς, μια φορά τον καθένα κάθε φορά, πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε;

ii) Να βρείτε το άθροισμα όλων αυτών των τριψήφιων αριθμών.

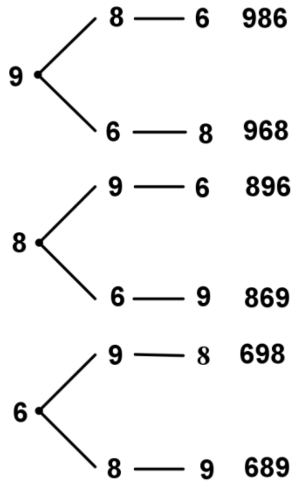
iii) Πόσοι από αυτούς διαιρούνται με το 4.

Λύση

i) Έχουμε να συμπληρώσουμε τρεις θέσεις. Για την πρώτη θέση έχουμε τρεις επιλογές, για την δεύτερη θέση έχουμε δύο επιλογές και για την τρίτη μία, άρα θα έχουμε 3x2x1=6 διαφορετικούς τριψήφιους.

($2^{ος}$ τρόπος)

Μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς, όπως στο διπλανό διάγραμμα.



ii)

Το 9 εμφανίζεται δύο στην πρώτη θέση δύο στην δεύτερη και δύο στην τρίτη θέση. Το ίδιο ισχύει και για τους αριθμούς 8, 6, άρα προκύπτει ότι:

2x9x100+2x9x10+2x9=1800+180+18=1998

2x8x100+2x8x10+2x8=1600+160+16=1776

2x6x100+2x6x10+2x6=1200+120+12=1332

Με συνολικό άθροισμα 5106.

iii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 αν τα δύο τελευταία του ψηφία διαιρούνται με το 4. Άρα είναι οι 968 και 896

Πρόβλημα 4

Τρία παιδιά συμμαθητές, ο Παναγιώτης η Κατερίνα και ο Γιάννης, πηγαίνουν στο κοντινό γήπεδο, για να παίξουν φέρνοντας μαζί τους και τις μπάλες τους. Στο γήπεδο συνάντησαν το πειραχτήρι της τάξης, τον Κωστάκη που τους ζήτησε να παίξει και αυτός μαζί τους. Ο Παναγιώτης θέλοντας να τον πειράξει του πρότεινε: "για να παίξεις μαζί μας θα πρέπει να βρεις πόσες μπάλες έχει φέρει ο καθένας μας και τι μπάλες." Ο Κωστάκης απόρησε αλλά δεν είχε και άλλη επιλογή οπότε δέχτηκε να προσπαθήσει να τις βρει.

"Λοιπόν", του είπε ο Παναγιώτης, "όπως βλέπεις, έχουμε φέρει 5 μπάλες, 2 μπάσκετ και 3 ποδοσφαίρου. Ο καθένας από εμάς έχει φέρει τουλάχιστον 1 μπάλα και το πολύ 2.
Ο καθένας από εμάς θα σου πει μια πρόταση που είναι ψεύτικη. Θα πρέπει εσύ από αυτά που θα σου πούμε και από αυτά που ξέρεις να βρεις τις μπάλες μας.
Ο Παναγιώτης λέει: "Έχω 1 μπάλα ποδοσφαίρου και 1 μπάλα μπάσκετ."
Η Κατερίνα λέει:" Έχω ακριβώς δύο μπάλες."
Ο Γιάννης λέει: "Έχω δύο μπάλες ίδιες."
Μπορείτε να βοηθήσετε τον Κωστάκη να βρει τις μπάλες τού κάθε παιδιού;

Λύση

Η Κατερίνα λέει: "Έχω ακριβώς δύο μπάλες." Αυτό είναι ψέμα. Άρα η Κατερίνα έχει μία μόνο μπάλα (1).
Άρα οι 4 μπάλες ανήκουν στα άλλα δύο παιδιά. Επειδή το κάθε παιδί έχει τουλάχιστον μια μπάλα και το πολύ δύο, θα πρέπει το κάθε ένα από τα άλλα δύο παιδιά να έχει από 2 μπάλες (2).
Ο Γιάννης λέει: "Έχω δύο μπάλες ίδιες." Αυτό είναι ψέμα.
Άρα ο Γιάννης, που από την (2) ξέρουμε ότι έχει 2 μπάλες, θα έχει 1 μπάλα μπάσκετ και 1 μπάλα ποδοσφαίρου (3).
Ο Παναγιώτης λέει: "Έχω 1 μπάλα ποδοσφαίρου και 1 μπάλα μπάσκετ." Αυτό είναι ψέμα. Άρα ο Παναγιώτης, που από την (2) ξέρουμε ότι έχει 2 μπάλες, θα έχει 2 ίδιες μπάλες (2 μπάσκετ ή 2 ποδοσφαίρου) (4).
Ξέρουμε ότι έχουμε 2 μπάλες μπάσκετ και 3 ποδοσφαίρου και από τις 2 μπάλες του μπάσκετ η μια, λόγω της (3), είναι του Γιάννη. Άρα ο Παναγιώτης, που λόγω της (4) έχει 2 μπάλες ίδιες, θα έχει 2 μπάλες ποδοσφαίρου.
Τι μένει;
Μια μπάλα μπάσκετ, δηλαδή της Κατερίνας, που λόγω της (1) έχει μία μπάλα. Άρα θα έχει μια μπάλα μπάσκετ.

Τελικά:

Ο Παναγιώτης έχει 2 μπάλες ποδοσφαίρου.

Η Κατερίνα έχει 1 μπάλα μπάσκετ.

Ο Γιάννης έχει 1 μπάλα μπάσκετ και 1 μπάλα ποδοσφαίρου.