Διαγωνισμός "Ο ΘΑΛΗΣ" για τους μαθητές της Β Γυμνασίου

Στον διαγωνισμό "Ο ΘΑΛΗΣ" της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.) η εξεταστέα ύλη είναι κυρίως η ύλη της Α΄ Γυμνασίου. Για την καλύτερη προετοιμασία των μαθητών, το Παράρτημα Αχαΐας της Ε.Μ.Ε., ετοίμασε ένα φυλλάδιο με την ύλη των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου. Στο συγκεκριμένο φυλλάδιο αναφέρονται οι γνώσεις που οι μαθητές έχουν μάθει στην Α΄ Γυμνασίου, με στόχο να κάνουν μια γρήγορη επανάληψη. Έγινε προσπάθεια το φυλλάδιο να είναι όσο γίνεται εύχρηστο, ώστε σε ελάχιστο χρόνο ένας μαθητής, να φρεσκάρει τις γνώσεις του και να μπορέσει έτσι να δοκιμάσει να λύσει τα θέματα του διαγωνισμού "Ο ΘΑΛΗΣ".

Για την παρουσίαση της ύλης της Α΄ Γυμνασίου θα ακολουθήσουμε το σχολικό βιβλίο και κάποιες φορές θα σας παραπέμπουμε στις σελίδες του βιβλίου σας.

ΜΕΡΟΣ Α΄

1) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Οι φυσικοί αριθμοί

I. Προσεταιριστική ιδιότητα $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

II. Επιμεριστική ιδιότητα

- **i)** Ως προς την πρόσθεση: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
- **ii)** Ως προς την αφαίρεση: $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$

III. Προτεραιότητα των πράξεων

- **i)** Υπολογισμός δυνάμεων
- **ii)** Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων
- **iii)** Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων
  Προσοχή: Αν υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

IV. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

- **i)** $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ (Ευκλείδεια διαίρεση)
  - Ο αριθμός Δ είναι ο διαιρετέος, ο αριθμός δ είναι ο διαιρέτης, ο αριθμός π είναι το πηλίκο και ο αριθμός υ το υπόλοιπο.
  - Προσοχή πρέπει $\upsilon<\delta$
- **ii)** Αν $\upsilon=0$ τότε έχουμε τέλεια διαίρεση $\Delta=\delta\cdot\pi$.

V. Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες σε **άρτιους (ζυγούς)** και σε **περιττούς (μονούς).**

- ✓ Οι άρτιοι (π.χ. 2, 4, 6, 60, 122, ...) διαιρούμενοι με το 2 δίνουν υπόλοιπο 0, ενώ οι περιττοί (3, 5, 7, 15, 121, ...) διαιρούμενοι με το 2 δίνουν υπόλοιπο 1.
- ✓ Ένας άρτιος, έστω α, μπορεί να γραφτεί με την μορφή **$\alpha=2\cdot\kappa$,** όπου κ ένας φυσικός αριθμός. Για παράδειγμα $60=2\cdot30$, $122=2\cdot61$.
- ✓ Ένας περιττός έστω β μπορεί να γραφτεί με την μορφή **$\beta=2\cdot\lambda+1$,** όπου λ ένας φυσικός αριθμός. Για παράδειγμα $15=2\cdot7+1$, $121=2\cdot60+1$.

  Σχόλιο: Η γραφή $\alpha=2\cdot\kappa$ και η γραφή $\beta=2\cdot\lambda+1$ πολλές φορές μας βοηθάει να λύσουμε κάποιες δύσκολες ασκήσεις.

VI. Πρώτοι και Σύνθετοι Αριθμοί

- **i)** Ένας αριθμός λέγεται **πρώτος,** αν έχει για διαιρέτη τον εαυτό του και το 1, διαφορετικά **λέγεται σύνθετος.**
  Για παράδειγμα οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, ... είναι πρώτοι και οι αριθμοί 4, 6, 8, 9, 10, ... είναι σύνθετοι**.**
- **ii)** Το 1 (προφανώς και το 0) δεν θεωρείται ούτε πρώτος, ούτε σύνθετος αριθμός.
- **iii)** Τόσο οι πρώτοι όσο και οι σύνθετοι είναι άπειροι.
- **iv)** Όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί **εκτός του 2 που είναι άρτιος.**

VII. Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι <u>μηδέν</u> ονομάζεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.

VIII. Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των α και β και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α, β).**

- ✓ Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ** τους αν είναι: **ΜΚΔ(α, β)=1.**

IX. Ανάλυση ενός φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 28

X. Κριτήρια Διαιρετότητας

- ➢ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με 10 ή 100 ή 1000 ή ... αν λήγει σε ένα ή δύο ή τρία ή ... μηδενικά.
- ➢ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
- ➢ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.
- ➢ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- ➢ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το 4 ή και το 25, αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι μηδέν.

2) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - Τα κλάσματα

I. Ίσα ή ισοδύναμα κλάσματα: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ **τότε** $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ **"χιαστί γινόμενο"**

Τα κλάσματα $\frac{4}{5}$ και $\frac{12}{15}$ είναι ισοδύναμα δηλαδή ισχύει $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ και προφανώς $4\cdot 15=5\cdot 12$.

Είναι $\frac{12}{15}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{4}{5}$ (κάναμε απλοποίηση)

Ένα κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί λέγεται ανάγωγο κλάσμα. Τα κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{12}{19}$ είναι ανάγωγα και έχουν ΜΚΔ(5,7)=1, ΜΚΔ(12,19)=1.

II. Πράξεις με κλάσματα

i) Πρόσθεση

Τα κλάσματα πρέπει να είναι **ομώνυμα:** $\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\delta}$

ii) Αφαίρεση

Τα κλάσματα πρέπει να είναι **ομώνυμα:** $\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha-\beta}{\delta}$

iii) Πολλαπλασιασμός: $\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot\delta}$, επίσης $\kappa\cdot\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\kappa}{1}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\kappa\cdot\alpha}{\gamma}$

iv) Διαίρεση

$\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$, επίσης $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

v) **Επιμεριστική ιδιότητα** $\frac{\alpha}{\delta}\cdot\left(\frac{\beta}{\kappa}\pm\frac{\gamma}{\lambda}\right)=\frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{\beta}{\kappa}\pm\frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{\gamma}{\lambda}$

vi) Σύγκριση κλασμάτων**: Τα κάνουμε ομώνυμα**

3) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - Δεκαδικοί Αριθμοί

Μονάδες μήκους, Μονάδες εμβαδού και μονάδες όγκου

Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 65

4) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - Εξισώσεις και προβλήματα

I. Οι εξισώσεις (στόχος να βρούμε τον άγνωστο αριθμό x)

i) Οι εξισώσεις: α+x=β, x−α=β, α−x=β

Για την λύση αυτών των εξισώσεων συνήθως ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (Προσοχή όποιος όρος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο)
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και υπολογίζουμε τον άγνωστο x.

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων είναι

- α+x=β ή x=β–α παράδειγμα 4+x=18 ή x=18–4 ή x=14.
- x–α=β ή x=β+α παράδειγμα x–5=11 ή x=11+5 ή x=16.
- α–x=β ή α–β=x ή x=α–β παράδειγμα 8–x=7 ή 8–7=x ή x=8–7 ή x=1.

ii) Η εξίσωση: αx=β.

Για να βρούμε τον άγνωστο αριθμό x θα πρέπει να απαλλαγούμε από τον συντελεστή του που είναι ο αριθμός α. Αυτό γίνεται μόνο αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το α (α≠0), οπότε θα έχουμε

$\frac{\alpha x}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$ ή $x=\frac{\beta}{\alpha}$ παράδειγμα $3x=21$ ή $\frac{3x}{3}=\frac{21}{3}$ ή $x=7$.

Σχόλιο: Υπάρχει περίπτωση να έχουμε να λύσουμε και κάποια άσκηση που να έχει να κάνει και με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις. Δηλαδή να χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους, να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και να προκύψει μια εξίσωση σαν την αx=β, τότε διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου και βρίσκουμε τον άγνωστο αριθμό x.

Παράδειγμα 6x–5=x+20 ή 6x–x=+20+5 ή 5x=25 ή $\frac{5x}{5}=\frac{25}{5}$ ή x=5.

iii) Η εξίσωση α : x=β.

Όταν έχουμε να λύσουμε μια εξίσωση στην οποίαν υπάρχουν κλάσματα, καλό είναι να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, ώστε να μας προκύπτει εξίσωση με κάποια από τις προηγούμενες μορφές.

Η απαλοιφή των παρονομαστών γίνεται αν βρούμε το ΕΚΠ των παρονομαστών και πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ.

Είναι α : x=β ή $\frac{\alpha}{x}=\beta$ (ΕΚΠ=x) ή $x\cdot\frac{\alpha}{x}=x\cdot\beta$ ή $\alpha=\beta\cdot x$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=x$.

Παράδειγμα 9 : x=3 ή $\frac{9}{x}=3$ (ΕΚΠ=x) ή $x\cdot\frac{9}{x}=x\cdot 3$ ή $9=3\cdot x$ ή $\frac{9}{3}=x$ ή $x=3$.

iv) Η εξίσωση x : α=β.

Επειδή έχουμε παρονομαστή η διαδικασία είναι ίδια.

Είναι x : α=β ή $\frac{x}{\alpha}=\beta$ (ΕΚΠ=α) ή $\alpha\cdot\frac{x}{\alpha}=\alpha\cdot\beta$ ή $x=\alpha\cdot\beta$.

II. Το πρόβλημα

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα οι εξισώσεις είναι ένα πολύτιμο εργαλείο.

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με την βοήθεια των εξισώσεων συνήθως ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και εντοπίζουμε τη ζητούμενη ποσότητα.
- Επιλέγουμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε. Συνήθως διευκολύνει να θέτουμε x το μικρότερο από τα ζητούμενα (Αν αυτό μπορεί να εκτιμηθεί).
- Εκφράζουμε όλα τα υπόλοιπα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.
- Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος, που προκύπτει, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.
- Λύνουμε την εξίσωση.
- Ελέγχουμε αν η Λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

5) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο - Ποσοστά

Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 82 σχετικά παραδείγματα.

6) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο Ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά

I. Αναλογίες

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ οπότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Ιδιότητες

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ ή $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

ii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$.

iii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

II. Ποσά ανάλογα

Δύο ποσά x και y λέγονται **ανάλογα**, εάν ο λόγος τους διατηρείται σταθερός: $\frac{y}{x} = \lambda$ ή $y = \lambda \cdot x$, όπου λ σταθερός αριθμός.

Αυτό σημαίνει ότι όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό. Ο σταθερός αριθμός λ, ονομάζεται συντελεστής αναλογίας.

Σχόλιο: Θα λέμε ότι τα α, β, γ είναι ανάλογα των αριθμών κ, λ, μ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu}$.

III. Ποσά αντιστρόφως ανάλογα
Δύο ποσά x και y ονομάζονται **αντιστρόφως ανάλογα**, εάν το γινόμενό τους διατηρείται σταθερό, δηλαδή είναι $y\cdot x=\lambda$.

Αυτό σημαίνει ότι όταν οι τιμές του ενός ποσού πολλαπλασιάζονται επί έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό (ή πολλαπλασιάζονται με τον αντίστροφο του ίδιου αριθμού).

Στην περίπτωση που λ=1, τα y και x είναι αντίστροφοι αριθμοί.

7) ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί

I. Εκτός από τους φυσικούς αριθμούς, που τους χαρακτηρίζουμε και ως θετικούς έχουμε και τους αρνητικούς. Για να τους ξεχωρίζουμε στους φυσικούς (θετικούς) βάζουμε μπροστά ένα σύμβολο το (+) και στους αρνητικούς βάζουμε μπροστά το (−). Από κοινού οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί αποτελούν το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

II. **Ρητοί αριθμοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα. Αριθμητές ή παρονομαστές στους ρητούς είναι οι ακέραιοι αριθμοί. **Προσοχή το 0 δεν μπορεί να είναι παρονομαστής κάποιου ρητού.**

III. Πράξεις με ρητούς

- **i)** Πρόσθεση ομόσημων ρητών: Βάζουμε πρόσημο το κοινό και κάνουμε πρόσθεση. Παραδείγματα +5+9+12=+26, −2−5−11−18=−36
- **ii)** Αφαίρεση ρητών: Βάζουμε πρόσημο του μεγαλυτέρου και κάνουμε αφαίρεση. Παραδείγματα +21−35=−14, −19+30=11.
- **iii)** Αν έχουμε να υπολογίσουμε μια παράσταση με προσθέσεις και αφαιρέσεις ρητών τότε γράφουμε πρώτα τους θετικούς και στην συνέχεια τους αρνητικούς. Στους θετικούς βάζουμε πρόσημο (+) και κάνουμε πρόσθεση και στους αρνητικούς βάζουμε πρόσημο (−) και κάνουμε πάλι πρόσθεση. Έτσι προκύπτει ένα θετικός και ένας αρνητικός αριθμός. Τότε βάζουμε πρόσημο του μεγαλυτέρου και κάνουμε αφαίρεση.
  Παράδειγμα:
  +5−29−8+23+26−15+11−18=+5+23+26+11−29−8−15−18= +65−70=−5.

iv) Πολλαπλασιασμός - διαίρεση ρητών: Κανόνας των προσήμων.

$$+\cdot+=+,\ \ +\cdot-=-,\ \ -\cdot+=-,\ \ -\cdot-=+$$

v) Γινόμενο πολλών παραγόντων

- ✓ Αν κάποιος από τους παράγοντες είναι 0 τότε το γινόμενο είναι 0
- ✓ Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων (–) είναι άρτιο τότε το αποτέλεσμα θα είναι θετικός ρητός.
- ✓ Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων (–) είναι περιττό τότε το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός ρητός

vi) Απαλοιφή παρενθέσεων

- ✓ Όταν μπροστά από μια παρένθεση έχει πρόσημο το + ή δεν έχει τίποτα μπορούμε να απαλείψουμε την παρένθεση και να γράψουμε τους όρους που υπάρχουν μέσα στην παρένθεση όπως είναι.
- ✓ Όταν μπροστά από μια παρένθεση έχει πρόσημο το – μπορούμε να απαλείψουμε την παρένθεση μαζί με το – και να γράψουμε τους όρους που υπάρχουν μέσα στην παρένθεση με αντίθετο πρόσημο.

IV. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

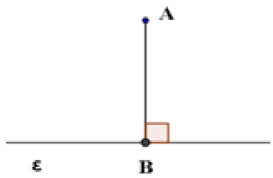
- Ορισμοί
  - ✓ $\alpha^0=1$, $\alpha^1=\alpha$
  - ✓ $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$ ή $\alpha^{-\nu}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}$
  - ✓ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ με α, β≠0 και μ, ν φυσικοί αριθμοί.
- Ιδιότητες δυνάμεων
  - ✓ $\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\mu}=\alpha^{\nu+\mu}$
  - ✓ $\alpha^{\nu}:\alpha^{\mu}=\alpha^{\nu-\mu}$
  - ✓ $(\alpha\cdot\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$
  - ✓ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
  - ✓ $(\alpha^{\nu})^{\mu}=\alpha^{\nu\cdot\mu}$ με α, β≠0 και μ, ν φυσικοί αριθμοί.
  - ✓ $\alpha^{\nu}:\beta^{\mu}=\alpha^{\nu}\cdot\frac{1}{\beta^{\mu}}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{-\mu}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

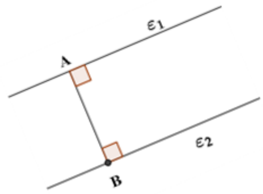
✓ **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο Βασικές Γεωμετρικές έννοιες**

I. Ορισμοί

- **i)** **Διχοτόμο γωνίας** ονομάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες
- **ii)** **Ορθή** ονομάζουμε τη γωνία που έχει μέτρο ίσο με 90^o
- **iii)** **Οξεία** ονομάζουμε τη γωνία με μέτρο μικρότερο των 90^o
- **iv)** **Αμβλεία** ονομάζουμε τη γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90^o και μικρότερο των 180^o
- **v)** **Μη κυρτή** ονομάζουμε μια **γωνία** με μέτρο μεγαλύτερο των 180^o και μικρότερο των 360^o
- **vi)** **Εφεξής γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο
- **vii)** **Παραπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία, ή 180^o.
- **viii)** **Συμπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία.
- **ix)** **Κατακορυφήν γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- **x)** Δύο **ευθείες** του ιδίου επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.
- **xi)** **Απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε** ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ από το σημείο Α προς την ευθεία ε.



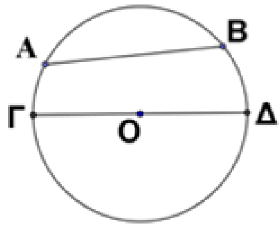
- **xii)** **Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών** ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$) λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές, π.χ. το ΑΒ.



- **xiii)** Δύο ευθείες του επιπέδου που είναι κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

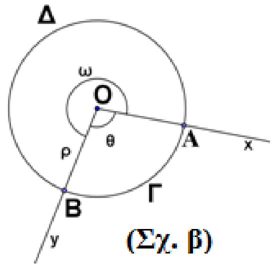
- **xiv)** Στο σχήμα α η ΑΒ λέγεται **χορδή του κύκλου** και η ΓΔ λέγεται **διάμετρος** (είναι η μεγαλύτερη χορδή και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου) **.**



(Σχ. α)

- **xv)** Στο σχήμα β τα σημεία Α, Β ορίζουν στο κύκλο δύο τόξα τα $\overset{\frown}{B\Gamma A}$ και $\overset{\frown}{B\Delta A}$ που αντιστοιχούν στην κυρτή γωνία θ και την μη κυρτή γωνία ω αντίστοιχα. Το τόξο

$\overset{\frown}{B\Gamma A}$ λέγεται **αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης κυρτής γωνίας** $\widehat{BOA}=\theta$. Όμοια το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta A}$ λέγεται **αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης μη κυρτής γωνίας** $\widehat{BOA}=\omega$.



(Σχ. β)

xvi) **Το μέτρο ενός τόξου** ορίζεται να είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας του και μετράτε σε μοίρες.

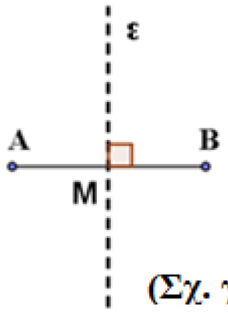
II. **Συμμετρία**

Συμμετρία ως προς άξονα και συμμετρία ως προς σημείο

Τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα

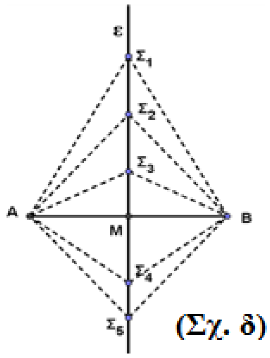
III. **Μεσοκάθετος** ευθυγράμμου τμήματος

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (Σχ . γ).



(Σχ. γ)

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του (Σχ. δ).
- **Αντίστροφα:** Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετο** του τμήματος.



(Σχ. δ)

.

IV. **Παράλληλες ευθείες** που τέμνονται από μία άλλη.

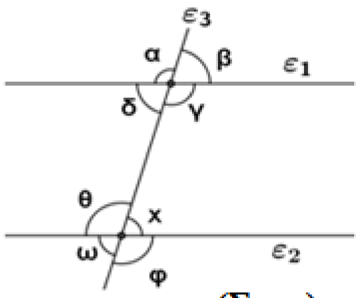
Ιδιότητες παραλλήλων ευθειών

Οι ευθείες **ε_1** και **ε_2,** στο σχήμα **ε,** είναι παράλληλες και τέμνονται από την ευθεία ε_3, τότε ισχύει:

- Οι **εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες**. Δηλαδή είναι: $\hat{\gamma}=\hat{\theta}$ και $\hat{\delta}=\hat{x}$.

- Οι **εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\alpha}=\hat{\theta}$, $\hat{\beta}=\hat{x}$, $\hat{\gamma}=\hat{\phi}$ και $\hat{\delta}=\hat{\omega}$.



(Σχ. ε)

- Οι **εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\gamma}+\hat{x}=180^o$ και $\hat{\delta}+\hat{\theta}=180^o$.
- Οι **εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\phi}+\hat{\beta}=180^o$ και $\hat{\alpha}+\hat{\omega}=180^o$.
- Οι **εντός εκτός εναλλάξ είναι παραπληρωματικές**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\theta}+\hat{\beta}=180^o$ και $\hat{\alpha}+\hat{x}=180^o$.

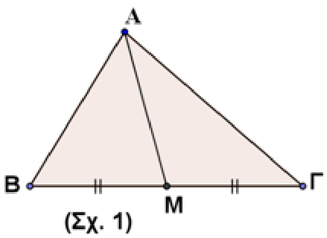
  Παρατηρήσεις:
  - Οι οξείες γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες
  - Οι αμβλείες γωνίες είναι κι αυτές μεταξύ τους ίσες.

V. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

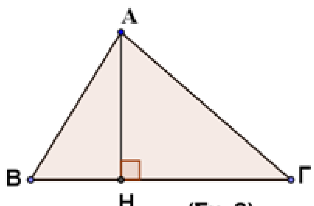
i) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς του, λέγεται **διάμεσος** (Σχ. 1).

ii) Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται **ύψος** του τριγώνου (Σχ. 2).

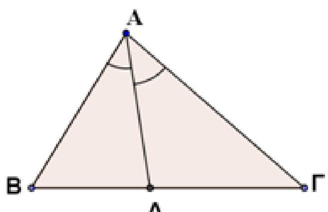
iii) Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται **διχοτόμος** της γωνίας αυτής, του τριγώνου (Σχ. 3).



(Σχ. 1)



(Σχ. 2)



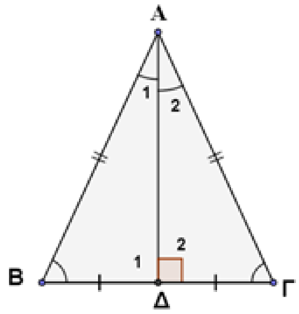
(Σχ. 3)

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου - Άθροισμα γωνιών τριγώνου

- Η ευθεία της **διαμέσου**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **άξονας συμμετρίας** του **ισοσκελούς** τριγώνου

- Η **διάμεσος**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **ύψος** και **διχοτόμος**

- Οι **προσκείμενες γωνίες** στη βάση του ισοσκελούς είναι **ίσες**

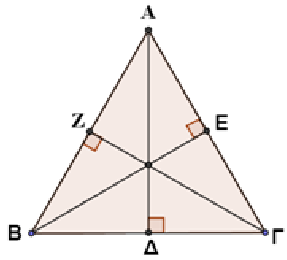


Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

- Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου

- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος

- Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους



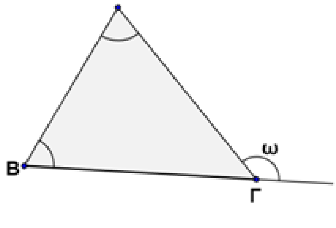
VI. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

- **Θεώρημα:** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^{o}$

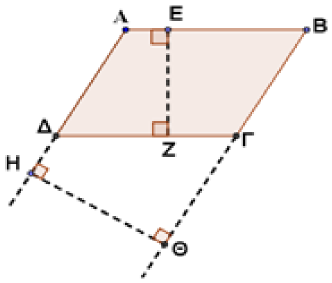
- Κάθε μία από τις γωνίες ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60^{o}

- **Πόρισμα:** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.

- **Πόρισμα:** Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
  Στο διπλανό σχήμα η γωνία ω που φτιάχνεται από μία πλευρά του τριγώνου και την προέκταση μιας άλλης λέγεται εξωτερική.



VII. Παραλληλόγραμμο-Ορθογώνιο-Ρόμβος-Τετράγωνο-Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο



- . **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή **ΑΒ//ΓΔ** και **ΑΔ//ΒΓ**.

- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του παραλληλογράμμου.

- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.

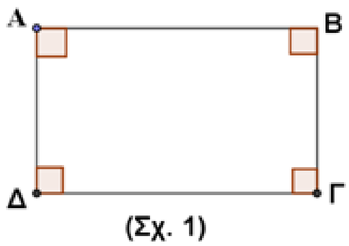
- Για τις βάσεις **ΑΒ** και **ΓΔ** ύψος είναι το **ΕΖ**, ενώ για τις βάσεις **ΑΔ** και **ΒΓ** ύψος είναι το **ΗΘ.**

VIII. Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων

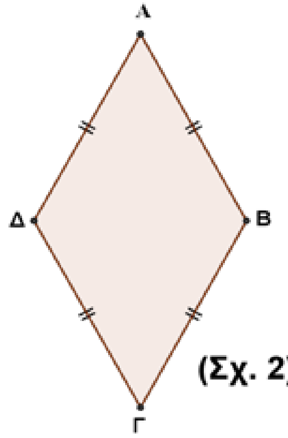
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλά **ορθογώνιο** (Σχ. 1).

- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **ρόμβος** (Σχ. 2).

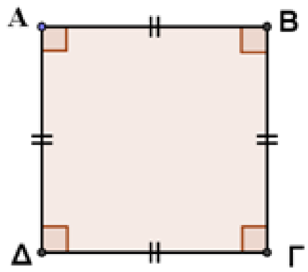
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **τετράγωνο** (Σχ. 3).



(Σχ. 1)

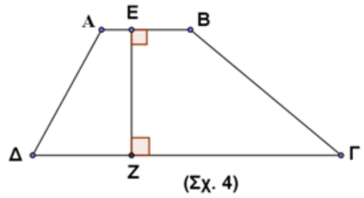


(Σχ. 2)



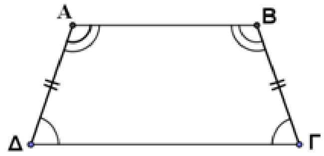
(Σχ. 3)

IX. Τραπέζιο



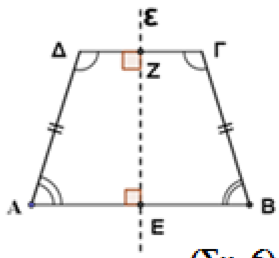
(Σχ. 4)

- Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο** (Σχ. 4).
- Οι παράλληλες πλευρές **ΑΒ, ΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου. Η ΑΒ είναι η μικρή βάση και η ΓΔ η μεγάλη.
- Η απόσταση των βάσεων, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.
- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του **ίσες** λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο** (Σχ. 5).



(Σχ. 5)

Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου



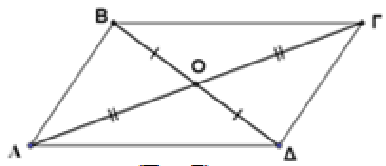
(Σχ. 6)

- ✓ Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του (Σχ. 6).
- ✓ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες δηλαδή ισχύει: $\hat{A}=\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$.

Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου

Ιδιότητες του πλάγιου παραλληλογράμμου:

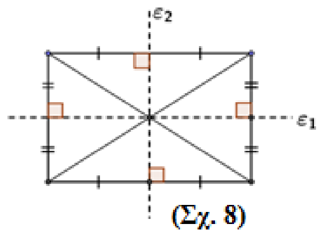
- ✓ Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.
- ✓ Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες
- ✓ Οι διαγώνιές του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- ✓ Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του (Σχ. 7).



(Σχ. 7)

Ιδιότητες ορθογωνίου παραλληλογράμμου:

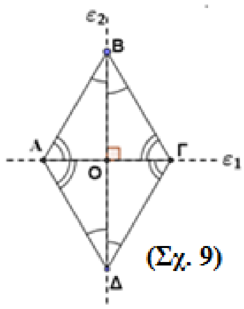
- ✓ έχουμε όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον
- ✓ Οι διαγώνιές του είναι ίσες.
- ✓ Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας (Σχ. 8).



(Σχ. 8)

Ιδιότητες του ρόμβου:

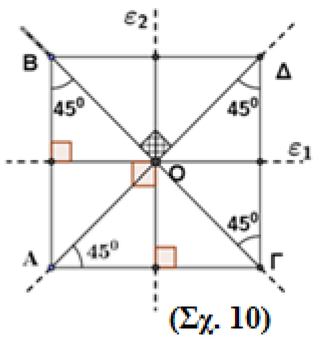
- ✓ έχουμε όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον
- ✓ Οι διαγώνιες είναι κάθετες
- ✓ Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του
- ✓ Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας (Σχ. 9).



(Σχ. 9)

Ιδιότητες του τετραγώνου:

- ✓ έχουμε όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον
- ✓ Οι διαγώνιές του είναι ίσες
- ✓ Οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα
- ✓ Οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του
- ✓ Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας (Σχ. 10).



(Σχ. 10)

Παρουσίαση λυμένων θεμάτων της Β΄ Γυμνασίου από τον διαγωνισμό "Ο ΘΑΛΗΣ"

Στον διαγωνισμό **"Ο ΘΑΛΗΣ"** τα τέσσερα θέματα που εξετάζονται οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, αφορούν την Άλγεβρα, την Πρακτική Αριθμητική, την Γεωμετρία και την Θεωρία Αριθμών. Θα παρουσιάσουμε τέσσερα αντιπροσωπευτικά θέματα, ένα από καθεμία από τις παραπάνω ενότητες και θα τα λύσουμε, γράφοντας ταυτόχρονα και την σκέψη που κάναμε για να τα λύσουμε. Αυτό το κάνουμε διότι θέλουμε να δείξουμε στα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου το πως εκμεταλλευόμαστε τα δεδομένα μας, πως τα συνδέουμε με την θεωρία που έχουμε μάθει και πως τα συνδέουμε μεταξύ τους, με τελικό στόχο να λύσουμε το θέμα.

Το Θέμα της Άλγεβρας

Γεια σου! Είμαι η Εμέ και θα προσπαθήσω να σε βοηθήσω να λύσεις το Πρόβλημα της Άλγεβρας στον Μαθηματικό διαγωνισμό «Ο Θαλής» της Β΄ Γυμνασίου. Συνήθως είναι το 1^{ο} Πρόβλημα του διαγωνισμού κι αν είσαι λίγο προσεκτικός θα πάρεις εύκολα τις πρώτες πέντε πολύτιμες μονάδες.

Χμ, μου ακούγεται δύσκολο αλλά σε προκαλώ να προσπαθήσεις. Όταν λες ότι στο πρώτο πρόβλημα του διαγωνισμού θα συναντήσω το Θέμα της Άλγεβρας, φαντάζομαι πως εννοείς μια άσκηση με πράξεις, δυνάμεις, παρενθέσεις και κλάσματα. Σωστά;

Σωστά! Θα υπάρχει μια μεγάλη παράσταση που θα την ονομάζουν με ένα κεφαλαίο γράμμα και θα σου ζητούν να υπολογίσεις την τιμή της. Δηλαδή, αν για παράδειγμα μια παράσταση Α είναι ίση με πράξεις αριθμών, να μπορείς μετά την εκτέλεση αυτών των πράξεων να βρεις με ποιον αριθμό είναι ίση η παράσταση Α.

Να βρω δηλαδή την τιμή της παράστασης. Κατάλαβα! Έχουμε κάνει και στο σχολείο τέτοιες ασκήσεις στο κεφάλαιο 7. Βάλε μια να δεις πόσο καλός είμαι. Να είναι δύσκολή όμως σαν αυτές που βάζουν στους διαγωνισμούς!

Ας δούμε πρώτα πόσο καλός είσαι στα βασικά και μετά πάμε και σε πιο δύσκολα. Για να δω, ξέρεις να υπολογίσεις τις παραστάσεις:

$$A = 2^0 \;, \quad B = \frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{(-12)^{16}}{6^{15}} \quad ;$$

Χμ ... Καλά το πρώτο είναι εύκολο. Κάθε αριθμός στη μηδενική κάνει ένα, ναι ξέρω ... κάθε μη μηδενικός αριθμός στη μηδενική ήθελα να πω αλλά εδώ τον βλέπω είναι ο 2, άρα $A = 2^0 = 1$ πάει αυτό ... Το B όμως
Θέλει τέχνασμα ...

Γιατί δεν υπολογίζεις τον $(-6)^{17}$ και μετά τον $(-3)^{16}$ οπότε με μια διαιρεσούλα να τελειώνουμε;

Έχεις χιούμορ βλέπω! Θέλεις να δεις αν μπερδεύω τον $(-6)^{17}$ με τον $(-6)\cdot 17$ δηλαδή μια δύναμη με ένα γινόμενο. Αυτά είναι γνωστά από το Δημοτικό εκτός από το μείον αλλά οκ ... δεν είναι τόσο πρόβλημα αυτό ... γιατί αφού ο 17 είναι περιττός θα ισχύει $(-6)^{17} = -6^{17}$ ενώ στον παρονομαστή θα έχω $(-3)^{16} = 3^{16}$ αφού ο 16 είναι άρτιος ... Κάτι με τις ιδιότητες των δυνάμεων πρέπει να θυμηθώ ...

Εγώ στη θέση σου θα έκανα: $\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}} = \frac{-16926659444736}{43046721} = -393216$ τι λες;

Με δουλεύεις αλλά δε πειράζει ... Α, για μισό ... αν έγραφα τον $(-6)^{17}$ ως $(-6)^{16}\cdot(-6)^{1}$; Βέβαια! Κοίτα τώρα: $\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}} = \frac{(-6)^{16}\cdot(-6)^{1}}{(-3)^{16}} = \frac{(-6)^{16}}{(-3)^{16}}\cdot(-6)$

Απίστευτο! Το κλάσμα έχει σε αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο εκθέτη, άρα από ιδιότητες των δυνάμεων έχω ότι $\frac{(-6)^{16}}{(-3)^{16}}\cdot(-6)=$ $\left(\frac{-6}{-3}\right)^{16}\cdot(-6)=\ 2^{16}\cdot(-6)\ =-6\cdot 2^{16}$. Ναι, θα το άφηνα εδώ! Αυτή θα ήταν η απάντησή μου και είμαι σίγουρος ότι αν υπολογίσω το 2^{16} και μετά πολλαπλασιάσω με το -6 θα βρω όσο βρήκες κι εσύ!

Και στην παράσταση Γ τι θα έκανες;

Γιατί όχι μία από τα ίδια. Μάλιστα θα σου έλεγα ότι αρχίζω και το απολαμβάνω! Κοίτα: $\Gamma=\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}=\frac{12^{16}}{6^{15}}$ (μμμ ... πόσο μ΄ αρέσουν οι άρτιοι ...αφανίζουν τα μείον από τη ζωή μας...) $=\frac{12^{15}\cdot 12^{1}}{6^{15}}=\frac{12^{15}}{6^{15}}\cdot 12=$ $\left(\frac{12}{6}\right)^{15}\cdot 12$ δηλαδή $2^{15}\cdot 12$ ή πιο κομψά $12\cdot 2^{15}$. Θα το άφηνα έτσι. Άρα $A=1,\ B=-6\cdot 2^{16}$ και $\Gamma=12\cdot 2^{15}$. Αν έχεις απορίες μπορώ να στο εξηγήσω ξανά αλλά για να έχει ενδιαφέρον θέλω νέα παραδείγματα. Έχεις κάποια;

Κι εσύ έχεις χιούμορ βλέπω οπότε ας συνεχίσουμε με τις παραστάσεις $\Delta=\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}$ και $E=\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορείς να υπολογίσεις και αυτές;

Βρε Εμέ δεν βλέπω καμία διαφορά με πριν. Θα περίμενα μετά τα προηγούμενα να με δοκιμάσεις σε κάτι δυσκολότερο.
Αυτές είναι ακόμα πιο απλές.
Αν χαμογελάς επειδή δε με πιστεύεις απλά παρακολούθησέ με:

$\Delta=\dfrac{(-8)^{31}}{4^{31}}=-\dfrac{8^{31}}{4^{31}}=-\left(\dfrac{8}{4}\right)^{31}=-2^{31}$ (οι περιττοί εκθέτες δεν τα πάνε καλά με τα μείον και τα πετάνε έξω). Στην E τα μείον εξαϋλώνονται μόνα τους! Κοίτα: $\mathrm{E}=\dfrac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}=\left(\dfrac{-20}{-10}\right)^{31}=\left(\dfrac{20}{10}\right)^{31}=2^{31}$.

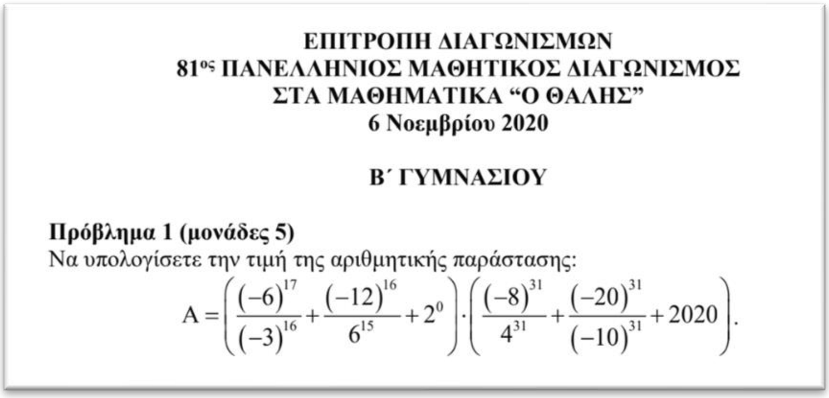
Απλά πράγματα!

Άρα, οι παραστάσεις που μου έδωσες είναι οι:

$\mathrm{A}=2^0=1,\ \mathrm{B}=-6\cdot 2^{16},\ \Gamma=12\cdot 2^{15},\ \Delta=-2^{31}$ και $\mathrm{E}=2^{31}$

Γιατί χαμογελάς; Έχω κάνει κάπου λάθος;

Το αντίθετο! Θα χαμογελάσεις κι εσύ αν σου δείξω το περσινό θέμα στον διαγωνισμό Θαλή για την Β Γυμνασίου!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right).$$

Λοιπόν, πώς σου φαίνεται;

Αποτελείται από τις παραστάσεις που έλυσα πριν! Όλες οι παραστάσεις μαζί δημιουργούν μια μεγαλύτερη και απ' ότι βλέπω η ημερομηνία της χρονιάς του διαγωνισμού κάνει πιο εντυπωσιακή την παράσταση χωρίς να τη δυσκολεύει! Τέλειο!

Δεν θα τη λύσεις;

Τι; Α, ναι απλά τη χάζευα λίγο. Είναι:

$$A=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right)$$

$$A=\left(-6\cdot 2^{16}+12\cdot 2^{15}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)$$

ή

$$A=\left(-6\cdot 2^{16}+6\cdot 2\cdot 2^{15}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)$$

οπότε

$$A=\left(-6\cdot 2^{16}+6\cdot 2^{16}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)$$

άρα

$$A=(0+1)\cdot(0+2020)=1\cdot 2020=2020$$

Νομίζω είναι σωστή! Θα είναι ωραίο να είναι σωστή. Είναι;
Τέτοια θέματα βάζουν; Πότε είπες ήταν αυτό;

Χαχαχα...Σωστή είναι! Περσινό Θέμα, 6 Νοεμβρίου 2020.
Και μάντεψε! Φέτος ο διαγωνισμός είναι Σάββατο 6 Νοεμβρίου 2021 9 το πρωί. Εγώ θα είμαι εκεί από τις 8μιση. Αν θέλεις, έλα κι εσύ λίγο νωρίτερα να τα πούμε!

Εεεε...Περίμενε Εμέ, μη φεύγεις! Τα άλλα θέματα;

Προτεινόμενα θέματα

1) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A}=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)$$ (Θαλής 10/11/2018)

Αποτ. 100

2) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A}=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^2+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$ (Θαλής 11/11/17) Αποτ. 0

3) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$\mathbf{A=(200:8+12\cdot 100)+(200:(8+2)+762)\cdot[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}]^2}$.

(Θαλής 30/11/2007)

Αποτ. 2007

Θέμα Πρακτικού προβλήματος

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 €, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

(Θαλής 09/11/2019)

Δεδομένα	Ζητούμενα
$1^η$ μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του	Πόσα χρήματα είχε αρχικά;
$2^η$ μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που είχαν μείνει	
$3^η$ μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που είχαν μείνει.	
Του έμειναν τελικά **240 €**	

Λύση (με εξίσωση)

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος, έστω x, θα αντιπροσωπεύει τα χρήματα που είχε ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτη μέρα.

Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα x €.

Την $1^η$ μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του, οπότε:

- Την $1^η$ μέρα ξόδεψε $\frac{x}{3}$ € και του έμειναν $x-\frac{x}{3}=\frac{3x}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$ €.

  Την $2^η$ μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας οπότε:

- Τη $2^η$ μέρα ξόδεψε $\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{6}$ και του έμειναν $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{4x}{6}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$.

  Την $3^η$ μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, οπότε:

- Την $3^η$ μέρα ξόδεψε $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{10}$€ και του έμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{5x}{10}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$€, τα οποία είναι τα χρήματα που του έμεινα, δηλαδή τα **240 €**.

  Άρα έχουμε την εξίσωση: $\frac{2x}{5}=240$ ή $2x=5\cdot 240$ ή $2x=1200$ ή $x=\frac{1200}{2}=600$€.

2ος τρόπος (με αναγωγή στη μονάδα)

- Επειδή την πρώτη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε του μένουν τα $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ μέρους των χρημάτων του.

- Την δεύτερη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του έχουν μείνει, δηλαδή ξοδεύει το $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ μέρους των χρημάτων του και του μένει τα $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=$ $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ μέρους των χρημάτων.

- Την τρίτη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του έχουν μείνει, δηλαδή ξοδεύει το $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ μέρους των χρημάτων του και του μένουν τα $\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{5}{10}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ μέρους των χρημάτων που από τα δεδομένα είναι 240 €.

  Επειδή τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων είναι 240 €, τότε το $\frac{1}{5}$ είναι **240:2=120** €, και επομένως τα χρήματα που είχε ήταν $\frac{5}{5}=5\cdot\frac{1}{5}=5\cdot 120=600$ €.

3^{ος} τρόπος (αντίστροφη πορεία)

- Επειδή την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχα μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, του απέμειναν τα $\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας που ήταν **240 €**.

  Επομένως με αναγωγή στη μονάδα θα έχουμε:

  Τα $\frac{4}{5}$ των χρημάτων στο τέλος της δεύτερης μέρας είναι **240 €**

  Το $\frac{1}{5}$ " " " " " " " " $\frac{240}{4}=60$ **€**.

  Άρα τα $\frac{5}{5}$ των χρημάτων στο τέλος της δεύτερης μέρας είναι **60·5=300 €.**

- Επειδή την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει από την πρώτη μέρα, του απέμειναν τα $\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας που ήταν **300 €**.

  Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα θα έχουμε:

  Τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων στο τέλος της πρώτης μέρας είναι **300 €**

  Το $\frac{1}{4}$ " " " " " " " " $\frac{300}{3}=100$ **€**.

Άρα τα $\frac{4}{4}$ των χρημάτων στο τέλος της πρώτης μέρας είναι **100·4=400 €.**

- Επειδή την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του, του απέμειναν τα $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του που ήταν **400 €**.

  Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα θα έχουμε:

  Τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του είναι **400 €**

  Το $\frac{1}{3}$ " " " " " " $\frac{400}{2}=200$ €.

  Άρα τα $\frac{3}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του είναι **200·3=600 €.**

Προτεινόμενα θέματα

1) Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσό κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους. **(Θαλής 11/11/17)**
Αποτ. 130,2 €

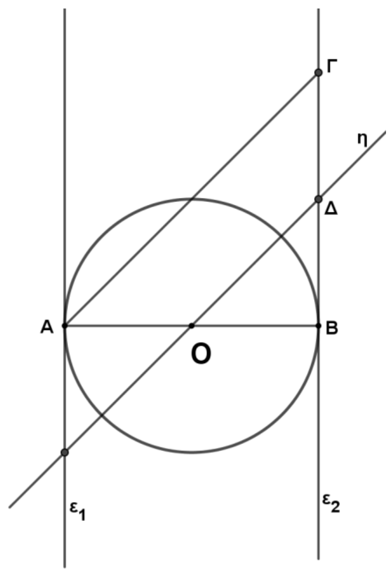
2) Ο Νίκος επισκέφτηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματά του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

(Θαλής 10/11/2018)

Αποτ. 620 €

Θέμα Γεωμετρίας

Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ, κέντρο Ο και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα Α και Β της διαμέτρου ΑΒ. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία **η** να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Η ευθεία **η** τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΟΒΔ.

(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του τμήματος ΒΓ.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΟΔΓ.

(Θαλής 09/11/2019)

Λύση

Σχόλιο: Θα παρουσιάσουμε τη λύση του προβλήματος, γράφοντας ταυτόχρονα και την αντίστοιχη θεωρία που απαιτείται και την σκέψη που κάνουμε για να οδηγηθούμε στη λύση του.

Υ (υπόθεση)	**Σ (συμπέρασμα)**
ΑΒ διάμετρος $\varepsilon_1 \perp AB$ $\varepsilon_2 \perp AB$ **ΒΓ=ΑΒ** **η//ΑΓ**	**α)** $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$ **και να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ, ΟΒΔ** **β) Δ μέσο ΒΓ** **γ) Το είδος του ΑΟΔΓ**

(α) Σε αυτό το ερώτημα το πρόβλημα μου ζητάει να αποδείξω πρώτα ότι δυο $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ, ΟΒΔ.

➢ Θα αποδείξουμε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Εδώ θα πρέπει να θυμηθώ πως μπορώ να αποδείξω ότι δυο ευθείες είναι παράλληλες;

α) Αν τέμνονται από μια άλλη ευθεία και σχηματίζουν τις:

ι) εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

ιι) εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες

ιιι) εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

β) Αν είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.

Θα αξιοποιήσω λοιπόν τα δεδομένα μου, για να δω, τι από τα παραπάνω θα μπορέσω να αποδείξω.

Το πρόβλημα μου λέει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Δηλαδή είναι κάθετες στην ίδια ευθεία. Άρα λοιπόν, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες μεταξύ τους.

- Θα υπολογίσουμε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΟΒΔ.

Για να μπορέσω να υπολογίσω τις γωνίες κάποιου τριγώνου, θα πρέπει να μου δίνουν στο σχήμα κάποιες γωνίες, τις οποίες να τις συσχετίσω με τις γωνίες του ζητούμενου τριγώνου και έτσι να μπορέσω να τις υπολογίσω. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο. Άρα πρέπει να βρω κάποιον άλλο τρόπο αξιοποιώντας τα δεδομένα μου.

Μου έχει δώσει ότι η ε_1 είναι κάθετη στην ΑΒ και η ε_2 κάθετη στην ΑΒ, οπότε θα σχηματίζονται ορθές γωνίες, δηλ. γωνίες 90^0, στα σημεία Α και Β.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα έχει $\boldsymbol{A\hat{B}\Gamma = \hat{B} = 90^o}$ δηλ. θα είναι ορθογώνιο, και επειδή μου δίνει και ότι ΒΓ=ΑΒ, θα είναι και ισοσκελές. Επομένως οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του θα είναι ίσες δηλαδή $\boldsymbol{\Gamma\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B}$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ θα έχουμε: $\boldsymbol{\Gamma\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B + A\hat{B}\Gamma = 180^o}$ ή $\boldsymbol{\Gamma\hat{A}B + \Gamma\hat{A}B + 90^o = 180^o}$ ή $\boldsymbol{2\,\Gamma\hat{A}B = 180^o - 90^o}$ ή $\boldsymbol{2\,\Gamma\hat{A}B = 90^o}$ ή $\boldsymbol{\Gamma\hat{A}B = \frac{90^o}{2} = 45^o = A\hat{\Gamma}B}$.

Εδώ από την θεωρία χρησιμοποιήσαμε:

i) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ που είναι: $\boldsymbol{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o}$

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίας της βάσης του είναι ίσες.

Επίσης και το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ορθογώνιο αφού $\boldsymbol{\hat{B} = 90^o}$.

Η ΑΓ είναι παράλληλη στην **η** άρα $\boldsymbol{\Gamma\hat{A}B = \Delta\hat{O}B = 45^o}$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΓ και **η** που τέμνονται από την ΑΒ.

Για τον ίδιο λόγο (ΑΓ//η) θα είναι $\boldsymbol{O\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = 45^o}$.

(β) Στο 2ο ερώτημα θέλω να δείξω ότι το Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Δηλαδή να δείξω ότι ΒΔ=ΔΓ ή ότι $B\varDelta = \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο προηγούμενο ερώτημα έδειξα ότι $B\hat{O}\varDelta = O\hat{\varDelta}B = 45^{o}$ δηλ. ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές. Άρα ΒΟ=ΒΔ.
Όμως, το ΒΟ είναι ακτίνα του κύκλου, άρα θα ισούται με το μισό της διαμέτρου ΑΒ, δηλ. $B\varDelta = BO = \frac{AB}{2} \overset{\text{Υποθ}}{=} \frac{B\Gamma}{2}$ (γιατί μου έχει δώσει ότι ΑΒ=ΒΓ).
Τελικά έχω: $B\varDelta = \frac{B\Gamma}{2}$ (το ΒΔ είναι το μισό του ΒΓ). Άρα το Δ είναι το μέσο του ΒΓ.

(γ) Θέλω να εξετάσω το είδος του τετραπλεύρου ΑΟΔΓ.

Από την θεωρία γνωρίζω ότι τα τετράπλευρα είναι:

ι) το παραλληλόγραμμο, ιι) το ορθογώνιο, ιιι) το ρόμβος, ιν) το τετράγωνο, ν) το τραπέζιο και νι) το ισοσκελές τραπέζιο.

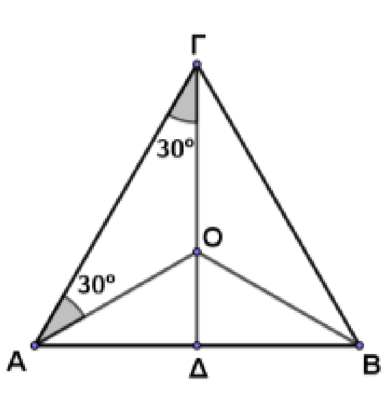
Θα πρέπει να εξετάσω το συγκεκριμένο τετράπλευρο και να δω τι προϋποθέσεις πληροί για να έχω ένα από τα παραπάνω τετράπλευρα;
Αυτό έχει τις πλευρές του ΑΓ και ΟΔ παράλληλες και τις πλευρές του ΑΟ και ΓΔ να τέμνονται στο σημείο Β. Άρα είναι τραπέζιο.
Όμως έχω από προηγούμενο ερώτημα ότι ΑΟ=ΟΒ=ΒΔ=ΔΓ δηλ. ΑΟ=ΔΓ, επομένως τελικά είναι ισοσκελές τραπέζιο, γιατί έχει τις μη παράλληλες πλευρές ίσες.

Προτεινόμενα θέματα

1) Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

i) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.

ii) Αν $\mathrm{O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = 30^{o}}$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$. **(Θαλής 11/11/2017)**



2) Στο διπλανό σχήμα 1 το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{40^o}$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathbf{A}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ=ΕΒ και ΑΒ=ΑΗ.

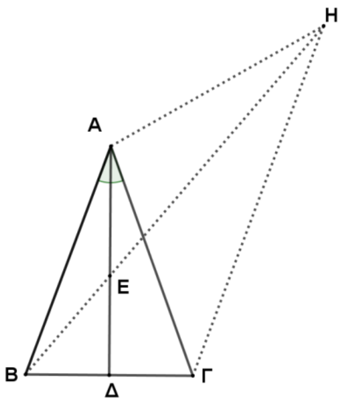
Να αποδείξετε ότι:

I. $\mathbf{A\hat{H}B = 20^o}$

II. $\mathbf{A\hat{\Gamma}H = 40^o}$

III. Η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\hat{H}\Gamma}$.

(Θαλής 10/11/2018)



(Σχ. 1)

Θέμα θεωρίας αριθμών

Θα παρουσιάσουμε το θέμα που τέθηκε στον διαγωνισμό στις 9 Νοεμβρίου 2019.

Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Λύση

Δεδομένα	**Ζητούμενα**
Έχουμε τους φυσικούς αριθμούς **1, 2, 3, ..., 26**	Πόσα από τα 13 κλάσματα είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;
Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους παραπάνω ακέραιους γράφουμε 13 κλάσματα	

Ερωτήματα:

1. Εδώ μας έχουν δώσει 26 ακεραίους αριθμούς και χρησιμοποιώντας μια μόνο φορά τον καθένα μπορούμε να γράψουμε 13 (26:2) κλάσματα για παράδειγμα: $\frac{20}{5}, \frac{21}{3}, \frac{26}{4}, \frac{11}{8}, \frac{19}{25}, \frac{7}{17}$ κ.λ.π

2. Από τα παραπάνω κλάσματα υπάρχουν κάποια που ισούνται με κάποιον ακέραιο αριθμό;

   Υπάρχουν, για παράδειγμα τα $\frac{20}{5}, \frac{21}{3}$ τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος, άρα είναι δεκτά.

3. Όλα τα παραπάνω κλάσματα ισούνται με κάποιον ακέραιο αριθμό;

   Όχι. Για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{26}{4}, \frac{11}{8}, \frac{19}{25}, \frac{7}{17}$ δεν ισούνται με κάποιον ακέραιο αριθμό και επομένως απορρίπτονται.

   Το πρόβλημα ουσιαστικά μας ζητά να επιλέξουμε κατάλληλα τους αριθμητές και τους παρονομαστές από τους αριθμούς 1,2,3,…,26 ώστε να κατασκευάσουμε όσο γίνεται περισσότερα κλάσματα με μέγιστο πλήθος 13 κλάσματα.

4. Πότε ένα κλάσμα ισούται με κάποιον ακέραιο αριθμό;
   Προφανώς θα πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή.
   Εδώ λοιπόν έχουμε να κάνουμε με θέματα διαιρετότητας ακεραίων αριθμών και συγκεκριμένα με τους αριθμούς 1, 2, 3, …, 26.

5. Πως βρίσκουμε τους διαιρέτες ενός ακεραίου αριθμού;
   Πως θα βρούμε για παράδειγμα τους διαιρέτες του 10;
   Είναι 10=2x5, δηλαδή γράψαμε το 10 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, οπότε οι διαιρέτες του 10 θα είναι 2, 5, 10 και το 1 που είναι διαιρέτης όλων των ακεραίων.

6. Ποιους αριθμούς λέμε πρώτους;
   Αυτούς που διαιρούνται μόνο από τον εαυτόν τους και προφανώς το 1.
   Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι οι πρώτοι αριθμοί θα διαιρούν μόνο τα πολλαπλάσιά τους, οπότε θα πρέπει να δούμε ποιοι είναι οι πρώτοι αριθμοί από τους 1, 2, 3, … , 26 ώστε να δημιουργήσουμε κατάλληλα κλάσματα που να είναι ακέραιοι αριθμοί.
   Οι πρώτοι είναι: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
   Ποιοι από αυτούς έχουν πολλαπλάσια ανάμεσα στους 26 πρώτους αριθμούς;
   Αυτοί είναι οι 6 μικρότεροι από αυτούς 2, 3, 5, 7, 11, 13 και μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο.

Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το $\frac{23}{1}=23$.

Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιο, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12.

Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα.

Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

$\frac{26}{13},\frac{25}{5},\frac{23}{1},\frac{22}{11},\frac{21}{7},\frac{20}{10},\frac{18}{9},\frac{15}{3},\frac{14}{2}$ (υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)

$\frac{24}{8},\frac{16}{4},\frac{12}{6}$ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών)

Προτεινόμενα θέματα

1) Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

(Θαλής 12/11/2016)

Αποτ. 8988

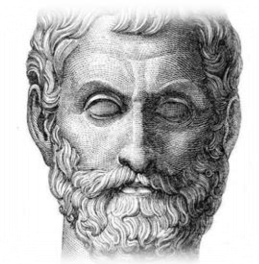
2) Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α. **(Θαλής 11/11/17)**

Αποτ. 8883

Η υπεύθυνη επιτροπή για τους διαγωνισμούς του Γυμνασίου, του Παράρτημα Αχαΐας της ΕΜΕ το 2019 και το 2020, είχε προτείνει θέματα προσομοίωσης για τον διαγωνισμό "Ο ΘΑΛΗΣ" της Β΄ Γυμνασίου.

Τα προτεινόμενα θέματα είναι τα παρακάτω μαζί με κάποιες ενδεικτικές λύσεις.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
« Ο ΘΑΛΗΣ »



Β' Γυμνασίου

ΠΑΤΡΑ 27 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2019

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left[\frac{(-21)^3}{7^3}+\frac{10}{26}:\frac{\frac{5}{8}}{3+\frac{2}{8}}\right]\cdot\left[\frac{64^{-2}}{(-256)^{-2}}+\left(3^3-5^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]$$

Πρόβλημα 2

Αν $\dfrac{\mathbf{(-1)^{\nu}}}{\mathbf{\nu+1}}>\dfrac{\mathbf{(-1)^{\nu}}}{\mathbf{\nu}}$ με ν θετικό ακέραιο, να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\mathbf{\nu+2019}}{\mathbf{2}}$ είναι επίσης θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3

Ένα κινητό τηλέφωνο κοστίζει 800 €. Στην περίοδο των εκπτώσεων μειώθηκε η τιμή του κατά 20% και μια βδομάδα μετά βγήκε σε προσφορά, για λίγες μέρες, με επιπλέον μείωση 20%. Να βρείτε το ποσοστό αύξησης επί τοις εκατό, ώστε μετά το τέλος της προσφοράς, η τιμή του κινητού να επανέλθει στα 800 €.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{90^o}$, ΑΒ<ΑΓ και Δ το μέσον της ΑΓ. Φέρνουμε την κάθετη της ΑΓ στο Δ και έστω Ε το σημείο τομής της με την ΒΓ.

i) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΓ=ΕΒ.

ii) Έστω ΑΖ⊥ΒΓ και Η το σημείο τομής της ΔΕ με την προέκταση της ΑΖ. Αν το Ζ είναι το μέσον της ΑΗ να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\mathbf{B}}$ και $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

iii) Φέρνουμε ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την ΒΓ. Έστω Θ το σημείο τομής της (ε) με την προέκταση της ΔΕ. Να αποδείξετε ότι ΘΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\hat{\Theta}E}$.

Ενδεικτικές Λύσεις

Πρόβλημα 1

Είναι: $\mathbf{A}=\left[\left(-\frac{21}{7}\right)^3+\frac{10}{26}:\frac{\frac{5}{8}}{\frac{26}{8}}\right]\cdot\left[\left(-\frac{64}{256}\right)^{-2}+(27-25)\cdot(-3)\right]=$

$=\left[(-3)^3+\frac{10}{26}:\frac{5}{26}\right]\cdot\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}+2\cdot(-3)\right]=\left[-27+\frac{10}{26}\cdot\frac{26}{5}\right]\cdot\left[(-4)^2-6\right]=$

$[-27+2]\cdot[16-6]=-250.$

Πρόβλημα 2

Ξέρουμε ότι αν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, τότε μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μικρότερο παρονομαστή. Στην δική μας περίπτωση δεν συμβαίνει αυτό, άρα θα πρέπει ο αριθμητής $(-1)^{\nu}$ να είναι αρνητικός. Αυτό θα γίνεται μόνο αν το ν είναι αριθμός περιττός, δηλαδή ν=2κ+1.

Για ν=2κ+1 θα έχουμε: $\frac{\nu+2019}{2}=\frac{2\kappa+1+2019}{2}=\frac{2\kappa+2020}{2}=\kappa+1010$ που είναι θετικός ακέραιος αριθμός .

Πρόβλημα 3

Με την πρώτη έκπτωση θα έχουμε: $800-\frac{20}{100}800=800-160=640$.

Με την δεύτερη έκπτωση θα έχουμε: $640-\frac{20}{100}640=640-128=512$.

Επειδή θέλουμε να βρούμε το ποσοστό αύξησης επί τοις εκατό ώστε η τιμή του κινητού να επανέλθει στα 800 €, θα έχουμε:

$512+\frac{\varepsilon}{100}512=800\Rightarrow\frac{\varepsilon}{100}512=800-512\Rightarrow\frac{\varepsilon}{100}512=288\Rightarrow\varepsilon\cdot512=28800\Rightarrow$

$\varepsilon=\frac{28800}{512}=56{,}25$. Άρα το ποσοστό αύξησης θα είναι 56,25%.

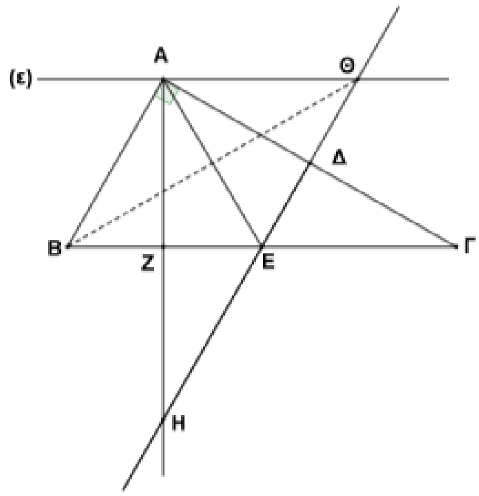
Πρόβλημα 4

i) Η ΔΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, άρα θα είναι ΕΑ=ΕΓ, οπότε θα είναι

$\mathbf{E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}B}$ (1).

Είναι $\mathbf{B\hat{A}E + E\hat{A}\Gamma = 90^o}$ (2) και $\mathbf{A\hat{B}E + A\hat{\Gamma}B = 90^o}$ (3).
Από τις (2), (3) έχουμε

$\mathbf{B\hat{A}E + E\hat{A}\Gamma = A\hat{B}E + A\hat{\Gamma}B \overset{(1)}{\Rightarrow}}$



$\mathbf{B\hat{A}E = A\hat{B}E}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, άρα ΑΕ=ΕΒ=ΕΓ.
ii) Επειδή το Ζ είναι μέσο της ΑΗ και ΕΖ⊥ΑΗ, η ΕΖ θα είναι μεσοκάθετος της ΑΗ,

οπότε θα είναι ΕΑ=ΕΗ και $\mathbf{A\hat{E}Z = Z\hat{E}H}$ (4).

Όμοια $\mathbf{A\hat{E}\Delta = \Delta\hat{E}\Gamma}$ (5) και επειδή

$\mathbf{\Delta\hat{E}\Gamma = Z\hat{E}H}$ ως κατά κορυφή, λόγω των (4) και

(5) θα είναι $\mathbf{A\hat{E}Z = A\hat{E}\Delta = \Delta\hat{E}\Gamma = 60^o}$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ θα είναι

$\mathbf{\hat{\Gamma} = 30^o}$ και $\mathbf{\hat{B} = 60^o}$.

(2ος τρόπος)

Επειδή η ΔΗ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ θα είναι ΑΗ=ΗΓ.

Όμοια επειδή ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΗ θα είναι ΓΑ=ΓΗ, οπότε από την προηγούμενη σχέση θα είναι ΓΑ=ΓΗ=ΑΗ, άρα το τρίγωνο ΑΗΓ είναι ισόπλευρο,

οπότε $\mathbf{H\hat{A}\Gamma = 60^o}$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ θα είναι $\mathbf{\hat{\Gamma} = 30^o}$ και $\mathbf{\hat{B} = 60^o}$.

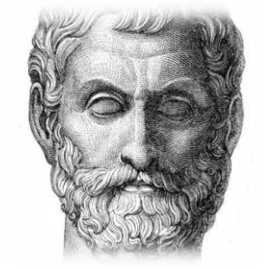
iii) Το ΑΒΕΘ είναι παραλληλόγραμμο. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές και έχει μια

γωνία 60^o ($\mathbf{A\hat{E}Z = A\hat{E}B = 60^o}$), άρα είναι ισόπλευρο, οπότε ΑΒ=ΒΕ, άρα το ΑΒ =

ΑΘ, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΘ θα είναι $\mathbf{A\hat{B}\Theta = A\hat{\Theta}B}$ και λόγω παραλληλίας (ΑΒ//ΕΘ) θα είναι

$\mathbf{A\hat{B}\Theta = B\hat{\Theta}E = A\hat{\Theta}B}$, άρα ΘΒ διχοτόμος.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
« Ο ΘΑΛΗΣ »



Β' Γυμνασίου

ΠΑΤΡΑ 02 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2020

Θέμα Α (Μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}\right]^{-1}}-\frac{(-22)^{-3}}{(-11)^{-3}}\right]\cdot\left[\frac{18^5}{(-3)^5\cdot 6^5}:\left(2-\frac{11}{8}\right)\right]$$

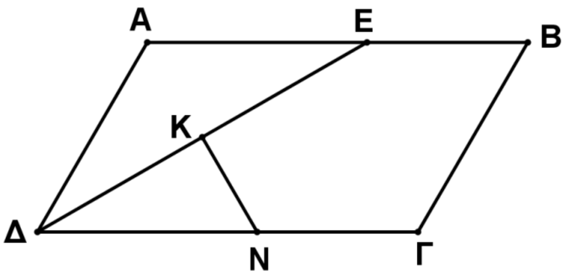
Θέμα Β (Μονάδες 8)

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, στο οποίο η $\hat{\mathbf{A}}=2\hat{\mathbf{\Delta}}$. Η διχοτόμος της $\hat{\mathbf{\Delta}}$ τέμνει την ΑΒ στο Ε και η μεσοκάθετη της ΔΕ τέμνει τη ΔΕ στο Κ και τη ΓΔ στο Ν.

1) Να βρείτε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

2) Να αποδείξετε η ΚΝ διέρχεται από το Α

3) Να αποδείξετε ότι ΑΝ=ΒΓ=ΝΕ.



Θέμα Γ (Μονάδες 7)

Να βρείτε το πλήθος των τριψήφιων θετικών ακεραίων με όλα τα ψηφία τους διαφορετικά, οι οποίοι σε οποιαδήποτε μετάθεση των ψηφίων τους, δίνουν τριψήφιο θετικό ακέραιο, που διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 3.

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Είναι $A=\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}\right]^{-1}}-\frac{(-22)^{-3}}{(-11)^{-3}}\right]\cdot\left[\frac{18^5}{(-3)^5\cdot 6^5}:\left(2-\frac{11}{8}\right)\right]=$

$\left[\frac{1}{\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right]^{-1}}-\left(\frac{-22}{-11}\right)^{-3}\right]\cdot\left[\frac{18^5}{(-3\cdot 6)^5}:\left(\frac{16-11}{8}\right)\right]=\left[\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}-(2)^{-3}\right]\cdot\left[\left(\frac{18}{-18}\right)^5:\left(\frac{5}{8}\right)\right]=$

$\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right]\cdot\left[(-1)^5:\left(\frac{5}{8}\right)\right]=\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\left[(-1):\left(\frac{5}{8}\right)\right]=\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=-1$

Θέμα Β

1) Είναι $\hat{\mathbf{A}}+\hat{\mathbf{\Delta}}=180^{\circ}\Rightarrow 2\hat{\mathbf{\Delta}}+\hat{\mathbf{\Delta}}=180^{\circ}\Rightarrow 3\hat{\mathbf{\Delta}}=180^{\circ}\Rightarrow\hat{\mathbf{\Delta}}=60^{\circ}$ και

$\hat{\mathbf{A}}=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$. Άρα $\hat{\mathbf{\Delta}}=\hat{\mathbf{B}}=60^{\circ}$ και $\hat{\mathbf{A}}=\hat{\mathbf{\Gamma}}=120^{\circ}$

2) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, άρα $\mathbf{A\hat{\Delta}E}=\mathbf{E\hat{\Delta}\Gamma}=30^{\circ}$ και επειδή ΑΕ//ΔΓ θα είναι $\mathbf{A\hat{E}\Delta}=\mathbf{E\hat{\Delta}\Gamma}=30^{\circ}=\mathbf{A\hat{\Delta}E}$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (ΑΔ=ΑΕ), άρα το Α ισαπέχει από τα άκρα της ΔΕ, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο της ΔΕ, οπότε η ΚΝ διέρχεται από το Α.

3) Το τρίγωνο ΚΔΝ είναι ορθογώνιο στο Κ και $\mathbf{K\hat{\Delta}N}=30^{\circ}$, άρα $\mathbf{\Delta\hat{N}K}=60^{\circ}$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισόπλευρο, άρα ΑΝ=ΝΔ=ΑΔ και επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι ΑΔ=ΒΓ, άρα ΑΝ=ΒΓ.
Η ΝΚ είναι μεσοκάθετος της ΔΕ άρα ΝΔ=ΝΕ, οπότε ΑΝ=ΒΓ=ΝΕ.

Θέμα Γ

Το 0 απορρίπτεται διότι δεν προκύπτει τριψήφιος σε οποιαδήποτε μετάθεση των ψηφίων τους.
Επίσης όλοι οι περιττοί απορρίπτονται, διότι δεν διαιρούνται με το 2.
Άρα τα ψηφία του αριθμού θα είναι τρία από τους 2, 4, 6, 8.
Επίσης θα πρέπει οι αριθμοί που θα προκύπτουν να έχουν άθροισμα ψηφίων πολλαπλάσιο του 3.

Άρα πρέπει να επιλέξουμε τους 2, 4, 6 σύνολο 6 αριθμούς (246, 264, 426, 462, 624, 642) ή τους 4, 6, 8 σύνολο 6 αριθμούς (468, 486, 648, 684, 846, 864).
Άρα συνολικά 12 θετικούς ακεραίους.