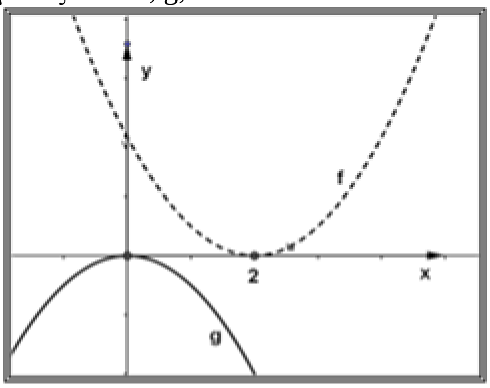
ΘΕΜΑ Α (#1)

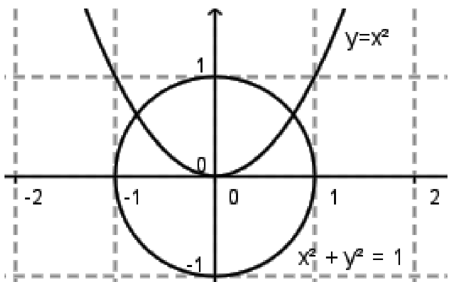
Α1. Να αποδείξετε ότι:

$$|\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega| \le \sqrt{2}$$

Α2. Στο σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Η συνάρτηση f προκύπτει από τη στροφή και μετατόπιση της g. Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των f, g;



Α3. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα μη γραμμικό σύστημα. Ποιο είναι αυτό και ποια η γεωμετρική του ερμηνεία;



Α4. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό: Αν ισχύει,

$$\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3} \text{ τότε } \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x_1\right) > \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x_2\right)$$

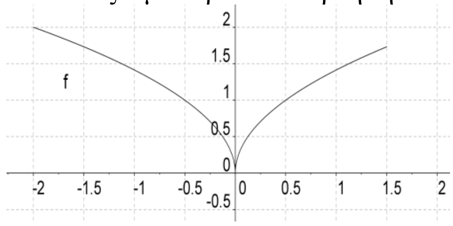
Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν ημx=0, τότε υποχρεωτικά θα είναι συνx=1.
2. Ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.
3. Η συνάρτηση f(x)=ημx, x∈R έχει μοναδική θέση ολικού μεγίστου.

Α6. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Η γραφική παράσταση που ακολουθεί απεικονίζει μια άρτια συνάρτηση»



Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

ΘΕΜΑ Α (#2)

Α1. Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιττή;

Ι. Να δείξετε ότι αν η περιττή συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R τότε f(0)=0.

ΙΙ. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι άρτια και περιττή τότε f(x)=0 για κάθε x∈R.

Α2. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Η $f(x) = \begin{cases} -x-1, x \le -1 \\ -x+1, x \ge 1 \end{cases}$ είναι περιττή». Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α3. Πότε μια συνάρτηση *f* λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της;

Ι. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό;

«Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της».

Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

ΙΙ. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον παρακάτω ισχυρισμό; «Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(3,3) τότε η *f* είναι γν. φθίνουσα». Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α4. Αν $\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$ τότε $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$

Ι. Σωστό ή λάθος;

ΙΙ. Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α5. Η εξίσωση: $\eta\mu x = \frac{\pi}{3}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει

λύση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ι. Σωστό ή λάθος;

ΙΙ. Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Α6. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις e^x και $\ln x$. Ποια τα πεδία ορισμού και ποια τα σύνολο τιμών τους με βάση τις γραφικές παραστάσεις που σχεδιάσατε; Ένας μαθητής παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων διατυπώνει την παρακάτω πρόταση: «Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει η σχέση $\ln x < x < e^x$».
Μπορείτε να τον βοηθήσετε να αποδείξει τον ισχυρισμό του;

ΘΕΜΑ Β (#1)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\left|x^2 - 1\right| + 1$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -2x^2 + 3 & , \quad x \in (-1, 1) \end{cases}$$

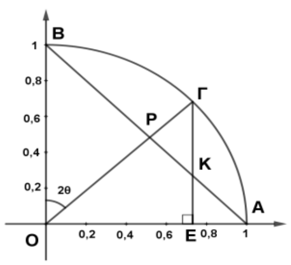
Β3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή και να τη βρείτε.

Β4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της –f.

ΘΕΜΑ Β (#2)

Στο παρακάτω τεταρτοκύκλιο δίνονται τα εξής:



$\Gamma E \perp OA, BO \perp OA, BO\Gamma = 2\theta, A(1,0), B(0,1)$

Β1. Να δείξετε:

$$\Gamma E = \sigma\upsilon\nu 2\theta$$

Β2. Να δείξετε:

$$E_{OE\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu 2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu 2\theta$$

Β3. Να δείξετε:

$$E_{E\Gamma A} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta\mu 2\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu 2\theta$$

Β4. Αν $f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\theta$ & $g(\theta) = 1 - \eta\mu 2\theta$ να τις σχεδιάσετε και να περιγράψετε μέσω των C_f και C_g, την μονοτονία τους σε διάστημα μιας περιόδου.

ΘΕΜΑ Β (#3)

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu^3 x + 1 & , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 2\eta\mu^3 x - 1 & , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{και}$$

$$g(x) = 1 - \sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{x}} + \eta\mu x$$

Β1.Ι. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

ΙΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$.

Β2.Ι. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ΙΙΙ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

Β3. Να λυθεί η ανίσωση

$$2f(x) \le g(x) + \sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{x}} \text{ για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ΘΕΜΑ Β (#4)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\left|\eta\mu^2 x - 1\right| + 1, \; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

Β2. Ι. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1, \; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

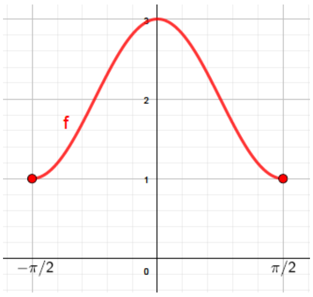
ΙΙ. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το 1.

ΙΙΙ. Για ποιες τετμημένες αποκτά η f την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της;

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

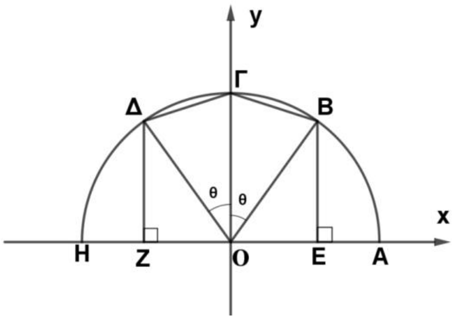
B5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η C_f. Με βάση αυτό να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των:

$$-f,\ f\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f(x)-3,\ f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2$$



ΘΕΜΑ Γ (#1)

Στο παρακάτω ημικύκλιο δίνονται τα εξής:



- $B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \theta$
- $\Delta Z, BE \perp AH$
- $OH = O\Delta = O\Gamma = OB = OA = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΖΔΓΒΕ)=(1+συνθ)ημθ

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε δύο συναρτήσεις κ, λ με κ(x)>0 και λ(x)>0, x∈A, όπου A ένα κοινό πεδίο ορισμού, αν οι συναρτήσεις κ, λ είναι γνησίως φθίνουσες στο A, τότε και η συνάρτηση (κ·λ) είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

Γ3. Αν h(θ)=(1+συνθ)ημθ

I. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

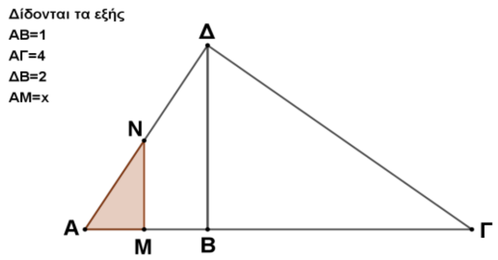
II. Να βρείτε τα ακρότατα της h (αν υπάρχουν) καθώς και το σύνολο τιμών της, για $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

III. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\le\frac{1}{\eta\mu\theta}-\eta\mu^2\theta,\ \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)\ (1).$$

ΘΕΜΑ Γ (#2)

Με βάση το σχήμα και τα δεδομένα που δίνονται για αυτό να απαντήσετε τα ερωτήματα που ακολουθούν:



Γ1. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του x=AM, καθώς το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.

Γ2. Αν το εμβαδόν εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=\begin{cases} x^2, 0<x\le 1 \\ \dfrac{-x^2+8x-4}{3}, 1<x\le 4 \end{cases}$$

δείξτε ότι είναι «ένα προς ένα».

Δίδεται επιπλέον:

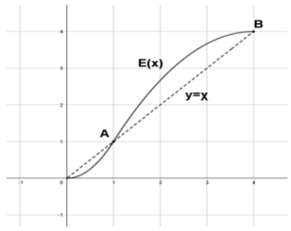
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, 0<x\le 1 \\ 4-\sqrt{12-3x}, 1<x\le 4 \end{cases}$$

Γ3. Προσδιορίστε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των f, E.

Γ4. I. Να δείξετε ότι $f\uparrow(0,1)$

II. Να δείξετε ότι $f\uparrow(1,4)$

Γ5. Δίνεται η κοινή γραφική παράσταση των E και y=x. Να συμπληρώσετε σε αυτό, με βάση τις μέχρι τώρα πληροφορίες, προσεγγιστικά τη C_f. Ποιες δύο σημαντικές παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε;



ΘΕΜΑ Γ (#3)

Δίνονται το μηδενικό πολυώνυμο: $P(x)=(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\kappa)x^2+(\kappa^2-1)x+\kappa^3-1$ και το πολυώνυμο:

$Q(\lambda)=(\lambda\sigma\upsilon\nu x)^4+\left[(2-\lambda)\eta\mu^2x\right]^2+(\lambda+1)\eta\mu^2x-\lambda$

το οποίο έχει παράγοντα το λ–1.

Γ1. Ι. Να δείξετε ότι κ=1

ΙΙ. Αν $\theta\in[0,\pi]$ να δείξετε ότι $\theta=0$ ή $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Γ2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους το πολυώνυμο Q(λ) έχει παράγοντα το λ–1. Με τι είναι ίσο το Q(λ) για την τιμή του x που θα βρείτε;

Γ3.Ι. Αν $Q(\lambda)=\lambda^4-\lambda$ και $R(\lambda)=Q(\lambda)+\lambda^2+\lambda-2$ να λυθεί η ανίσωση $R(\lambda)<0$.

ΙΙ. Να λυθεί η ανίσωση $R(\eta\mu\omega)\geq 0,\ \omega\in[0,\pi]$

Γ4. Αν $\omega=\frac{\pi}{2}$ να λυθεί η εξίσωση:

$\sqrt{x^2-\omega^2}=x-\rho$ (1), για τις διάφορες τιμές του ρ.

ΘΕΜΑ Γ (#4)

Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to R$ με

$$\frac{e^{2f(x)}+e^{\sqrt{4-4x^2}}}{2}=e^{f(x)+\sqrt{1-x^2}}\quad (1).$$

Γ1. Ι. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$.

ΙΙ. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της.

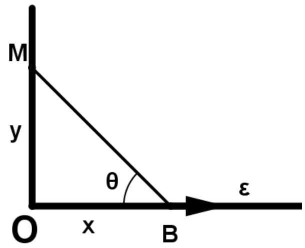
Γ2. Έστω $M(x_1,f(x_1))$ τυχαίο σημείο της C_f και Α, Β τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x με Α(–1,0) και Β(1,0)

Ι. Να δείξετε ότι η συνάρτηση του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

ΙΙ. α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθυγράμμων τμημάτων ΜΑ, ΜΒ για Μ(0,1).

β) Τι τρίγωνο είναι το ΑΜΒ για τη μέγιστη τιμή του εμβαδού;

Γ3. Μία σκάλα ΜΒ με μήκος $\sqrt{2}$ είναι στερεωμένη σε ένα τοίχο ΟΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ι. Καθώς η σκάλα γλιστράει κατά μήκος του Βε να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΒ συναρτήσει της γωνίας θ, δίνεται από τον τύπο $h(\theta)=\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$, δοθέντος ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$.

ΙΙ. Να σχεδιάσετε την C_h στο διάστημα μιας περιόδου.

ΙΙΙ. Να συγκρίνετε τα $h\left(\frac{\pi}{36}\right), h\left(\frac{\pi}{37}\right)$.

Γ4.Ι. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{1}{2}\eta\mu 2x=\sqrt{1-x^2}$ είναι αδύνατη για $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{1-x^2}=(1-x)^2$ (4)

ΘΕΜΑ Δ (#1)

Δίνεται η περιττή συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $2f(x)+f(-x)=(\lambda+\kappa)x^5+\mu x^3+\nu x+\rho$ (1) και το σύστημα $(\Sigma_1):\begin{cases}\lambda^2x+2y&=&4\\2x+y&=&\lambda\end{cases}$ το οποίο έχει μοναδική λύση (x_o,y_o) με λ≥0.

Δ1. Αν $\frac{1}{2}x_o^2 - 2|y_o| + \frac{5}{2} = |x_o| - \frac{1}{2}y_o^2$ (2), να βρεθεί το λ και η μοναδική λύση.

Δ2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και η f(−x) είναι γνησίως αύξουσα στο R, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Δ3. Δίνεται επιπλέον το σύστημα

$(\Sigma_2):\begin{cases} \kappa^2+\mu^2 & = & 5 \\ \kappa\mu & = & 2 \end{cases}$. Να λυθεί, να ερμηνευτεί γεωμετρικά και να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

Δ4. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση

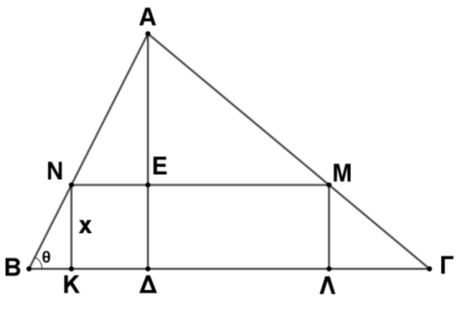
$|\nu-\rho|+|\nu+\rho+2|=0$ (4).

Αν λ=0 και κ>μ να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^5-2x^3-x-1$.

ΘΕΜΑ Δ (#2)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα εξής:

- ΒΓ=4, ΑΔ⊥ΒΓ, ΑΔ=2, ΒΝ=1, ΚΝ=x
- ΚΛΜΝ ορθογώνιο
- $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$



Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$(\text{ΚΛΜΝ}) = -2\eta\mu^2\theta + 4\eta\mu\theta.$$

Δ2. Για ποια γωνία θ το (ΚΛΜΝ) αποκτά τη μέγιστη τιμή και για ποια την ελάχιστη;

Δ3. **I.** Να αποδείξετε ότι

$(\text{ΒΚΝ}) = \frac{1}{2}\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ και

$(\text{ΑΝΕ}) = \frac{(2-\eta\mu\theta)^2}{2\eta\mu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, για $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

.

II. Να αποδείξετε ότι το (ΑΝΕ) είναι μεγαλύτερο από το (ΒΚΝ) για $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

III. Να αποδείξετε ότι $(\text{ΚΔΕΝ}) = 2\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

.

IV. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε τα εμβαδά (ΒΚΝ) και (ΚΔΕΝ) να γίνονται ίσα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι το (ΚΛΜΝ) είναι μεγαλύτερο από το (ΑΝΜ) για $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ (#3)

Δίδεται το σύστημα (Σ_1) στο οποίο α, β είναι ομόσημοι και το σύστημα (Σ_2):

$$\left.\begin{matrix} 3^{\alpha^2}+5^{\beta^2-2} & = & 106 \\ 3^{\alpha^2-1}+5^{\beta^2-1} & = & 152 \end{matrix}\right\}(\Sigma_1),$$

$$\left.\begin{matrix} \omega^2+\theta^2 & = & 1 \\ 2\omega\theta & = & 1 \end{matrix}\right\}(\Sigma_2), \text{ καθώς και η}$$

συνάρτηση: $f(\kappa)=\ln(\kappa+\sqrt{\kappa^2+1})$

Επιπλέον, θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x)=(\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi})x^4+\ln(e+\kappa)x^3-$$
$$-(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\theta)x^2-(e^{\ln\alpha}-\beta+1)x+\ln1+1$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Δ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $\kappa\ge0$.

Δ3. *Να λυθεί* $f(\kappa)=0, \kappa\ge0$.

Δ4. Να δείξετε ότι $\alpha-\beta=0$.

Δ5. Να δείξετε ότι $\omega=\theta$

Δ6. Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-x^2-x+1$

Δ7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

I. $\frac{P(\eta\mu\lambda)}{1-\eta\mu\lambda}=1, \lambda\in[0,\frac{\pi}{2})$

II. $\sqrt{P(\lambda)-1}+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{\eta\mu^2x+1}=$
$=\sqrt{2\eta\mu^2 2x+1}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$

όπου λ είναι η λύση του ερωτήματος **I.**

ΘΕΜΑ Δ (#4)

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}+2,$$

$$g(x)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3x \text{ και } t(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Δ1.Ι. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x)=1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

ΙΙΙ. Να λυθεί η ανίσωση

$$f(x)\le 1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Δ2.Ι. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές τιμές του κ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{\kappa^3-2\kappa^2}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{5\kappa-6}=3(\kappa^3-2\kappa^2)-3(5\kappa-6)$$

είναι -2, 1, 3.

ΙΙΙ. Σε μία Αριθμητική πρόοδο, η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega=e^{\ln\kappa}$, όπου κ η μεγαλύτερη ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και ο πρώτος όρος της προόδου, είναι η άλλη θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης. Να βρείτε τον 5ο όρο και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της Αριθμητικής προόδου.

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x)-\frac{3}{2}=g(\sigma\upsilon\nu x)+2,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad (1)$$

Τα θέματα με σύντομες υποδείξεις βρίσκονται στο περιοδικό:

Ευκλείδης Β, *τεύχη **116_118_119_120***.

Ψηφιακό υλικό:

http://www.hms.gr/?q=node/1653

Ενδεικτικά σημεία διάθεσης εκδόσεων Ε.Μ.Ε.:

https://korfiatisbooks.gr/eshop/ekdotis/elliniki-mathimatiki-etaireia/

http://emepatras.gr/

http://www.hms.gr/

Τα θέματα απευθύνονται σε καλά προετοιμασμένους μαθητές και ίσως αποτελέσουν για κάποιους μαθητές, ένα ενδιαφέρον υλικό καλοκαιρινής εξάσκησης, ενόψει της επόμενης χρονιάς.

Καλό καλοκαίρι!

Γεώργιος Μπατέλης

Ε.Μ.Ε._Παράρτημα Αχαΐας