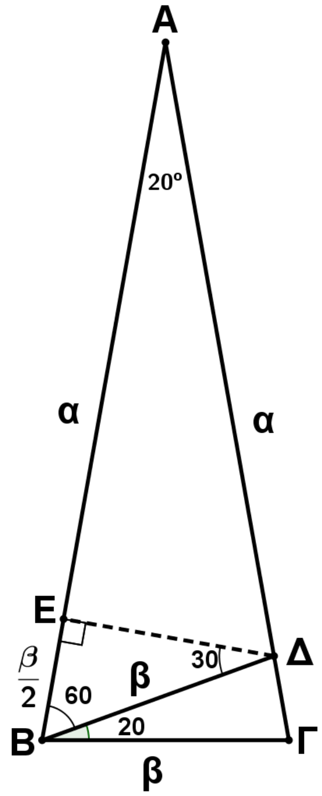
<u>Ασκήσεις και λύσεις με εικοσάρες γωνίες του συναδέλφου Απόστολου Μανωλούδη</u>

1) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 20^o$. Έστω ΑΒ=ΑΓ=α και ΒΓ=β. Να δείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 = 3\alpha^2\beta$.

<u>Λύση</u> (Αποστόλης Μανωλούδης)



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 20^o$ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^o$.

Θεωρώ στην ΑΓ σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ=β (1).

Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 80^o$, άρα $\Gamma\hat{B}\Delta = 20^o$ (2).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι όμοια, άρα θα είναι

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{\beta^2}{\alpha} \quad (3).$$

Είναι ΑΔ=ΑΓ−ΓΔ=$a - \frac{\beta^2}{\alpha}$ (4).

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $A\hat{B}\Delta \overset{(2)}{=} 80^o - 20^o = 60^o$ άρα από το νόμο των συνημίτονων θα έχουμε $A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2 - 2AB \cdot B\Delta \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o$ $\overset{(1)}{=} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \beta \cdot \frac{1}{2} = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta$ (5).

Φέρνω ΔΕ⊥ΑΒ και επειδή $A\hat{B}\Delta = 60^o$ θα είναι $B\hat{\Delta}E = 30^o$, άρα λόγω του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΕ θα είναι $BE = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\beta}{2}$ (6).

Η (5) λόγω της (4) γίνεται $\left(a - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$

$$a^2 + \frac{\beta^4}{\alpha^2} - 2\alpha \cdot \frac{\beta^2}{a} = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow a^4 + \beta^4 - 2\alpha^2 \cdot \beta^2 = \alpha^4 + \alpha^2 \cdot \beta^2 - \alpha^3 \cdot \beta \Leftrightarrow$$

$$\beta^4 - 2\alpha^2 \cdot \beta^2 = \alpha^2\beta^2 - \alpha^3\beta \Leftrightarrow \beta^3 - 2\alpha^2 \cdot \beta = \alpha^2\beta - \alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 = 3\alpha^2\beta .$$

2) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 20^o$. Έστω ώστε $\Gamma\hat{B}\Delta = 65^o$ και $B\hat{\Gamma}E = 60^o$. Να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}B = 40^o$.

<u>Λύση</u> (Αποστόλης Μανωλούδης)

Θεωρούμε τη γωνία $\Gamma\hat{B}Z = 60^o$ (Το Ζ βρίσκεται στη ΑΓ) και έστω Σ το σημείο τομής της με την ΕΓ, τότε το ΕΖΓΒ θα είναι ισοσκελές τραπέζιο και τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΕΖ ισόπλευρα.

Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΣΕΖ θα έχουμε:

ΕΖ=ΕΣ=ΣΖ (1).

Από το τρίγωνο ΒΖΓ θα είναι

$B\hat{Z}\Gamma = 180^o - 80^o - 60^o = 40^o$ (2).

Φέρνουμε ΒΡ⊥ΕΓ (το Ρ σημείο της ΑΓ), επειδή το τρίγωνο ΒΣΓ είναι ισόπλευρο η ΒΡ θα είναι μεσοκάθετος της ΓΣ, άρα ΣΡ=ΡΓ (3).

Θα είναι επίσης:

$\Gamma\hat{P}B = \Sigma\hat{P}B = 90^o - 20^o = 70^o$, $\quad P\hat{\Sigma}\Gamma = 20^o$ και

$\Sigma\hat{P}Z = 40^o$ και λόγω της (2) το τρίγωνο ΣΡΖ θα είναι ισοσκελές, οπότε ΣΖ=ΣΡ

Από τις (1), (3) θα είναι ΡΓ=ΡΣ=ΣΕ=ΣΖ, άρα το Σ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΕΖΡ.

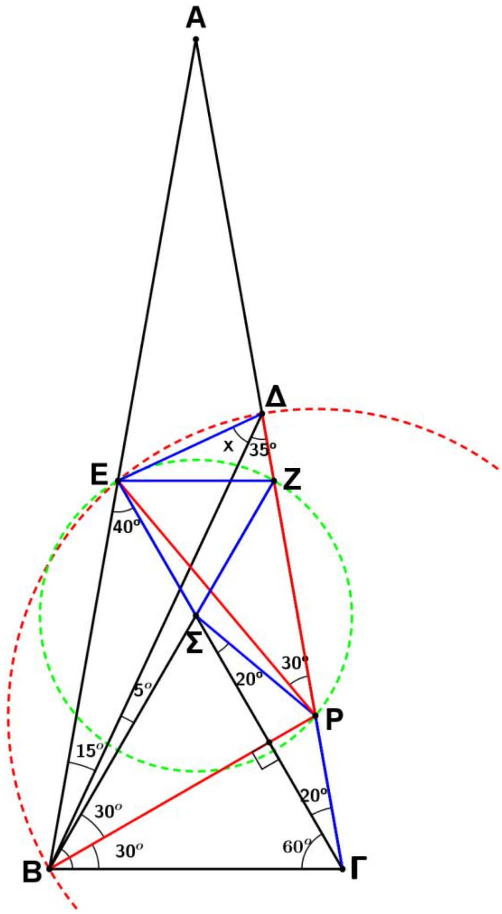
Επίσης επειδή ΣΕ=ΣΡ και $P\hat{\Sigma}\Gamma = 20^o$ θα είναι

$P\hat{E}\Sigma = \Sigma\hat{P}E = 10^o$ (4).

Από το τρίγωνο ΒΓΕ θα έχουμε

$B\hat{E}\Gamma = 180^o - 60^o - 80^o = 40^o$ και λόγω της (4)

θα είναι $P\hat{E}B = 40^o + 10^o = 50^o$ (5).



Είναι από την υπόθεση $\Gamma\hat{B}\Delta = 65^o$,

$E\hat{B}\Delta = 80^o - 65^o = 15^o$ και

$\Gamma\hat{B}P = P\hat{B}\Sigma = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$ άρα $P\hat{B}E = 50^o$ και λόγω της (5) το τρίγωνο ΡΒΕ θα είναι ισοσκελές, άρα ΡΕ=ΡΒ (6).

Από το τρίγωνο ΒΓΔ θα έχουμε $B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 80^o - 65^o = 35^o$ και επειδή

$P\hat{B}\Delta = 30^o + 5^o = 35^o$ και το τρίγωνο ΡΒΔ θα είναι ισοσκελές, άρα ΡΔ=ΡΒ (7).

Από τις (6), (7) θα είναι ΡΕ=ΡΒ=ΡΔ, οπότε το Ρ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΒΕΔ, οπότε

$$x = E\widehat{\Delta}B = \frac{E\widehat{P}B}{2} = \frac{80^o}{2} = 40^o. \quad (E\widehat{P}B = E\widehat{P}\Sigma + \Sigma\widehat{P}\Gamma = 10^o + 70^o)$$

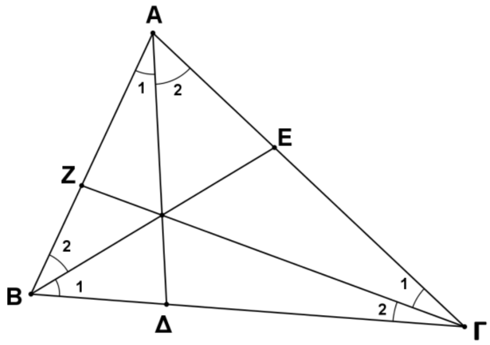
3) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} = 20^o$. Πάνω στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $A\widehat{\Gamma}E = 15^o$, και πάνω στη ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma\widehat{B}\Delta = 25^o$.

Να αποδείξετε ότι $\Gamma\widehat{E}\Delta = 5^o$.

Βοηθητική πρόταση: Θεώρημα **Ceva**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν (Σχ. 1).

Τότε ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{\Gamma E}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$ (1).



(Σχ. 1)

Τριγωνική εκδοχή του θεωρήματος

Ισχύει: $\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} \cdot \frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2} = 1$

Απόδειξη

$(AB\Delta) = \frac{1}{2} B\Delta \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot A\Delta \cdot \eta\mu A_1$ (2).

$(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \Gamma\Delta \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot A\Delta \cdot \eta\mu A_2$ (3).

Από τις (2), (3) έχουμε $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma} \cdot \frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma} \cdot \frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2}$ (4).

Όμοια $\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{B\Gamma}{AB} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2}$ και $\frac{ZA}{ZB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \cdot \frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2}$ (5).

Από τις (4), (5) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{\Gamma E}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = \frac{AB}{A\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{AB} \cdot \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \cdot \frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} \cdot \frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2} \Leftrightarrow$$

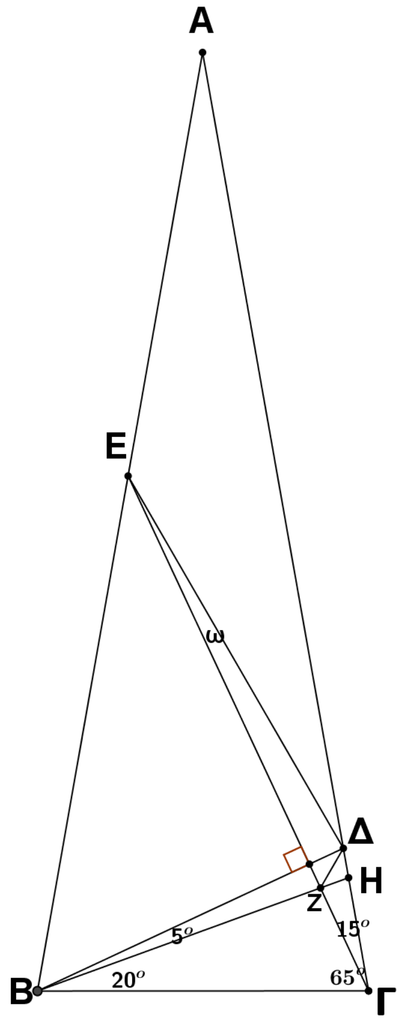
$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{\Gamma E}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = \frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} \cdot \frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} \cdot \frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2}.$$

<u>Λύση</u> (Από το διαδίκτυο)

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $\hat{\mathrm{A}} = 20^{o}$, θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 80^{o}$.

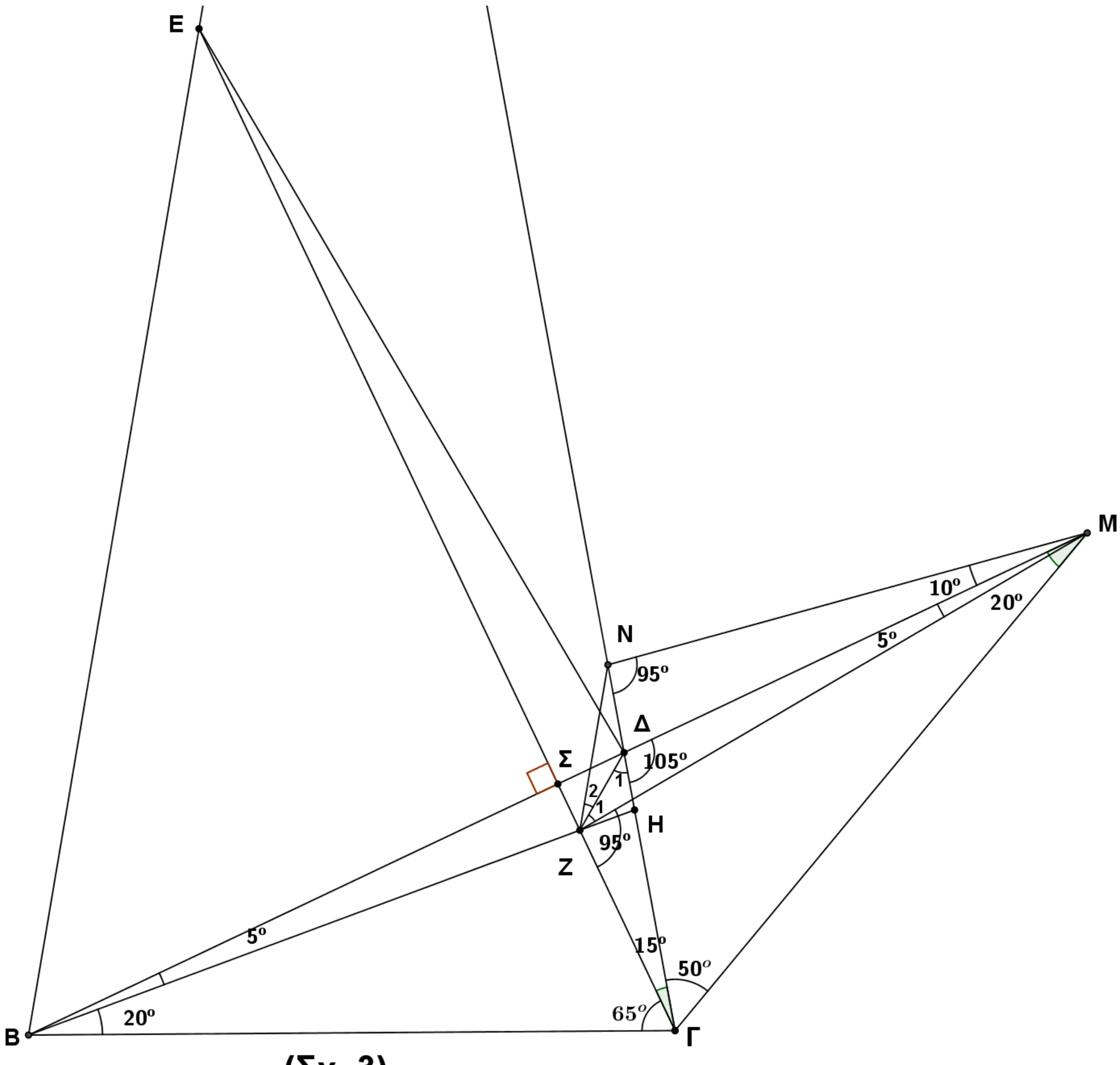
Κατασκευάζουμε την γωνία $\Delta\hat{B}H = 5^{o}$, το Η είναι στην ΑΓ, και έστω Ζ το σημείο τομής της ΒΗ με την ΕΓ. Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΖΒ είναι εγγράψιμο (Σχ. 2).

Σχόλιο: Επειδή θα φέρουμε κάποια βοηθητικά ευθύγραμμα τμήματα και το σχήμα δεν βολεύει, θα δουλέψουμε με το παρακάτω σχήμα 3 στο οποίο θα φαίνεται το σχήμα 2 από το Ε και κάτω.



(Σχ. 2)

Έστω Σ το σημείο τομής της ΕΓ με την ΒΔ και έστω Μ το συμμετρικό του Β ως προς το Σ. Επειδή ΓΣ μεσοκάθετη της ΒΜ το τρίγωνο ΒΓΜ θα είναι ισοσκελές, άρα $M\hat{B}\Gamma = B\hat{M}\Gamma = 25^{o}$.



(Σχ. 3)

Επειδή ΓΣ μεσοκάθετος της ΜΒ θα είναι ΒΖ=ΖΜ, άρα $\hat{\Sigma BZ} = \hat{\Sigma MZ} = 5^o$ και $\hat{ZB\Gamma} = \hat{ZM\Gamma} = 20^o$. Από το τρίγωνο ΒΜΓ θα έχουμε $\hat{B\Gamma M} = 180^0 - 50^o = 130^o$ και επειδή $\hat{A\Gamma B} = 80^o$ θα έχουμε $\hat{\Delta\Gamma M} = 50^o$ (Σχ. 3).

Στο τρίγωνο ΓΔΜ είναι $\hat{\Gamma\Delta M} = 180^o - 50^o - 25^o = 105^o$.

Έστω Ν το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΓΖΜ με την ΑΓ, τότε από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΓΖΝΜ θα είναι: $\hat{\Gamma NZ} = \hat{ZM\Gamma} = 20^o$ και $\hat{\Gamma NM} = \hat{\Gamma ZM} = 95^o$.

Επίσης θα είναι $\hat{NZM} = \hat{N\Gamma M} = 50^o$, οπότε $\hat{NZM} = 50^o \Leftrightarrow \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = 50^o \Leftrightarrow$
$\hat{Z}_2 = 50^o - \hat{Z}_1$,

Εφαρμόζουμε το τριγωνομετρικό θεώρημα του Ceva στο τρίγωνο ΜΝΖ και θα έχουμε:

$$\frac{\eta\mu 20}{\eta\mu 95}\cdot\frac{\eta\mu 10}{\eta\mu 5}\cdot\frac{\eta\mu Z_1}{\eta\mu(50-Z_1)}=1\Leftrightarrow \eta\mu 20\cdot\eta\mu 10\cdot\eta\mu Z_1=\eta\mu 95\cdot\eta\mu 5\cdot\eta\mu(50-Z_1)\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 20\cdot\eta\mu 10\cdot\eta\mu Z_1=\eta\mu(90+5)\cdot\eta\mu 5\cdot\eta\mu(50-Z_1)\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 20\cdot\eta\mu 10\cdot\eta\mu Z_1=\sigma\upsilon\nu 5\cdot\eta\mu 5\cdot\eta\mu(50-Z_1)\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 20\cdot\eta\mu 10\cdot\eta\mu Z_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu 5\cdot\eta\mu 5\cdot\eta\mu(50-Z_1)\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 20\cdot\eta\mu 10\cdot\eta\mu Z_1=\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 10\cdot\eta\mu(50-Z_1)\Leftrightarrow\eta\mu 20\cdot\eta\mu Z_1=\frac{1}{2}\cdot\eta\mu(50-Z_1)\Leftrightarrow$$

$\dfrac{\eta\mu Z_1}{\eta\mu(50-Z_1)}=\dfrac{1}{2\cdot\eta\mu 20}$ με προφανή ρίζα $Z_1=30^o$.

Σχόλιο: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu(50-x)},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ προφανώς είναι

$$f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu(50-x)-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu(50-x)\cdot(50-x)'}{\eta\mu^2(50-x)}=$$

$=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu(50-x)+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu(50-x)}{\eta\mu^2(50-x)}>0$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα $x=30^o$ είναι μοναδική.

Άρα $Z_1=30^o$ και $Z_2=20^o$, οπότε από τρίγωνο ΖΓΔ θα είναι $Z\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\Delta}_1=180^o-30^o-95^o-15^o=40^o$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΣΔ θα είναι $B\hat{\Delta}Z=90^o-40^o-15^o=35^o$.

Στο τρίγωνο ΕΓΒ είναι $\Gamma\hat{E}B=180^o-80^o-65^o=35^o=B\hat{\Delta}Z$ άρα το τετράπλευρο ΕΔΖΒ είναι εγγράψιμο, οπότε ω=5^o.

Πηγές

1) http://www.mathematica.gr
2) (Γεωμετρία 8 Βαγγέλης Ψύχας)

(2^{ος} Τρόπος)

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $\hat{A}=20^o$, θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}=80^o$ και από τα δεδομένα $\Gamma\hat{B}\Delta=25^o$, $\Delta\hat{B}A=55^o$ (1).

Φέρνω ΒΤ⊥ΑΓ τότε $\Gamma\hat{B}T=10^o$ και $T\hat{B}\Delta=15^o$.

Κατασκευάζω $B\hat{A}y=20^o$ και φέρνω ΒΡ⊥Αy τότε ΒΡ=ΒΤ διότι ΑΒ διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}y$ (2).

Κατασκευάζω $\boldsymbol{E\widehat{\Gamma}M = 15^o}$ και έστω Ζ, Λ, Μ τα σημεία τομής με τις ΒΔ, ΑΒ, Αy αντίστοιχα.

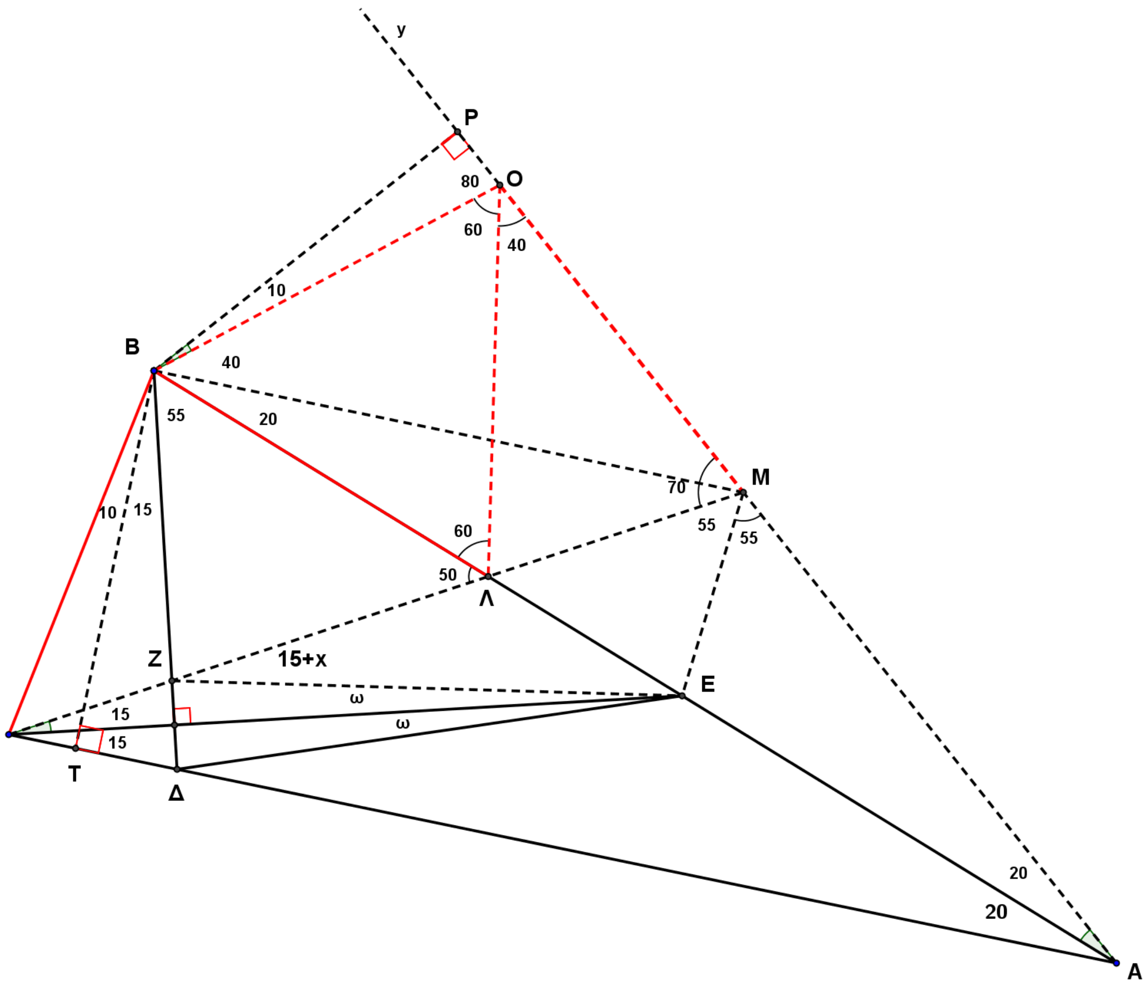
Από το τρίγωνο ΓΖΕ θα έχουμε $\boldsymbol{E\widehat{Z}M = 15 + \omega}$ (3).

Φέρνω $\boldsymbol{P\widehat{B}O = 10^o}$ τότε θα είναι $\boldsymbol{B\widehat{O}P = 80^o}$ και $\boldsymbol{O\widehat{B}A = 60^o}$ (διότι $\boldsymbol{B\widehat{A}y = 20^o}$) (4).
Τα τρίγωνα ΒΓΤ και ΒΡΟ είναι ίσα (ΒΤ=ΒΡ, από (2) και γωνίες ίσες) άρα ΒΓ=ΒΟ (5).

Στο τρίγωνο ΒΓΛ είναι: $\boldsymbol{\Gamma\widehat{B}\Lambda = 80^o}$, $\boldsymbol{B\widehat{\Gamma}\Lambda = 80^o - 30^o = 50^o}$, άρα $\boldsymbol{B\widehat{\Lambda}\Gamma = 50^o}$, οπότε θα είναι ισοσκελές άρα ΒΓ=ΒΛ και λόγω των (4),(5) θα είναι ΒΓ=ΒΛ=ΒΟ=ΟΛ (6).

Άρα το τρίγωνο ΟΒΛ είναι ισόπλευρο, άρα $\boldsymbol{B\widehat{O}\Lambda = O\widehat{\Lambda}B = \Lambda\widehat{B}O = 60^o}$ και $\boldsymbol{\Lambda\widehat{O}A = 180^o - 140^o = 40^o}$ (7).

Από το τρίγωνο ΟΛΜ θα έχουμε: $\boldsymbol{O\widehat{\Lambda}M = 180^o - 50^o - 60^o = 70^o}$ και επειδή λόγω (7) $\boldsymbol{\Lambda\widehat{O}A = 40^o}$ θα είναι $\boldsymbol{\Lambda\widehat{M}O = 70^o}$, άρα το τρίγωνο ΟΛΜ θα είναι ισοσκελές, άρα ΟΛ=ΟΜ και λόγω της (6) θα είναι ΒΓ=ΒΛ=ΒΟ=ΟΛ=ΟΜ (8).

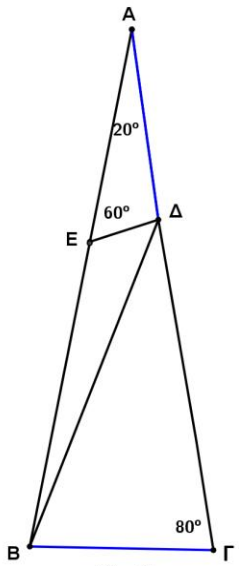


Στο τρίγωνο ΒΛΜ είναι ΟΒ=ΟΛ=ΟΜ άρα το Ο είναι το κέντρο της περιγεγραμμένης του περιφέρειας, οπότε θα είναι $\hat{\Lambda B M} = \frac{\hat{\Lambda O M}}{2} = 20^o$ (9).

Στο τρίγωνο ΓΜΑ οι ΑΛ, ΓΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{M A \Gamma}, \hat{A \Gamma M}$ αντίστοιχα άρα και η ΜΕ θα είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma M A}$, οπότε $\hat{\Gamma M E} = \hat{E M A} = \frac{180^o - 70^o}{2} = 55^o$ (10).

Από τις (1), (10) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ θα είναι εγγράψιμο, οπότε $\hat{E Z M} = \hat{E B M} = 20^o$, άρα $15^o + x = 20^o \Rightarrow x = 5^o$.

4) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}} = 20^o$. Πάνω στην ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ και πάνω στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\hat{A E \Delta} = 60^o$. Να αποδείξετε ότι $\frac{B\Delta}{AE} = \sqrt{3}$.



(Σχ. 1)

Σχόλιο

Στην πρώτη δημοσίευση στο site του Παραρτήματος Αχαΐας, με τίτλο «αχ αυτές οι εικοσάρες» είχαμε αντιμετωπίσει το παρακάτω πρόβλημα:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ώστε να ισχύει $\hat{\mathrm{A}} = 20^o$ και $\hat{\mathrm{A\Gamma B}} = 80^o$. Επιπλέον υπάρχει σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ. Να βρεθεί η γωνία $\hat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$.

Η λύση του προβλήματος μας έδωσε ότι $\hat{B\Delta\Gamma} = 30^o$ (*).
Με αυτό σαν δεδομένο θα προχωρήσουμε στη λύση του νέου προβλήματος.

<u>Λύση</u> (Αποστόλης Μανωλούδης)

Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ πλευρές του ίδιου τριγώνου.

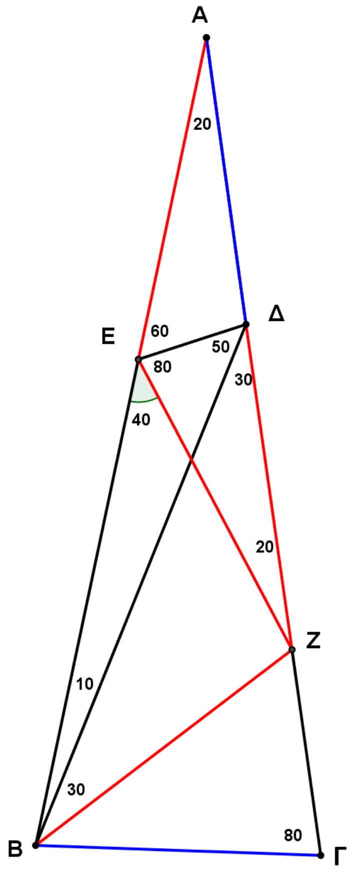
Στην ΑΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΑ=ΕΖ, τότε το τρίγωνο ΑΕΖ θα είναι ισοσκελές με ΕΑ=ΕΖ (1)

και $\widehat{EZA} = 20^o$ (2).

Είναι $\widehat{E\Delta Z} = 60^o + 20^o = 80^o$ και επειδή στο τρίγωνο ΕΔΖ είναι λόγω της (2) $\widehat{EZA} = 20^o$ θα έχουμε $\widehat{\Delta EZ} = 80^o$, άρα το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές οπότε θα είναι ΖΕ=ΖΔ και λόγω της (1) ΖΕ=ΖΔ=ΕΑ (3).

Από την βοηθητική άσκηση και τη (*) θα έχουμε $\widehat{B\Delta\Gamma} = 30^o$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΔ θα είναι $\widehat{AB\Delta} = 10^o$ (4).

Στο τρίγωνο ΕΔΒ είναι ΖΕ=ΖΔ, $\widehat{EZ\Delta} = 20^o$ και $\widehat{AB\Delta} = 10^o$, δηλαδή $\widehat{AB\Delta} = \widehat{EB\Delta} = \dfrac{\widehat{EZ\Delta}}{2}$ (**), άρα το Ζ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΕΒΔ, οπότε ΖΔ=ΖΕ=ΖΒ και λόγω της (3) θα είναι ΕΑ=ΖΔ=ΖΕ=ΖΒ (5).



(Σχ. 2)

Επίσης θα είναι $\widehat{BZ\Delta} = 180^o - 60^o = 120^o$ (6)

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΔΖ θα έχουμε:

$$B\Delta^2 = Z\Delta^2 + ZB^2 - 2Z\Delta \cdot ZB\sigma\upsilon\nu\,\widehat{BZ\Delta} \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$B\Delta^2 = 2EA^2 - 2EA^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\,\widehat{BZ\Delta} \overset{(6)}{\Leftrightarrow} B\Delta^2 = 2EA^2 - 2EA^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 120^o \Leftrightarrow$$

$$B\Delta^2 = 2EA^2 + 2EA^2 \cdot \eta\mu 30^o \Leftrightarrow B\Delta^2 = 2EA^2 + 2EA^2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow B\Delta^2 = 3EA^2 \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{AE} = \sqrt{3}\,.$$

(**)

Στο σχήμα 3 έχουμε τον εγγεγραμμένο στον κύκλο C, τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο είναι:

ΟΒ=ΟΓ και $\widehat{BA\Gamma} = x = \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$. Θα αποδείξουμε ότι το Ο είναι το κέντρο του κύκλου C.

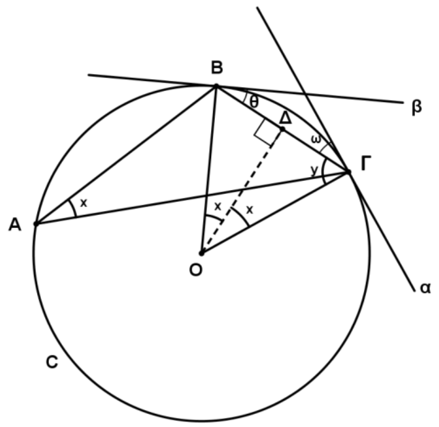
Στα Β και Γ φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου C και την ΟΔ⊥ΒΓ.

Οι γωνίες θ και ω θα είναι ίσες με την x ως υπό χορδής και εφαπτομένης, δηλαδή x=θ=ω (7).

Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές (ΟΒ=ΟΓ) και ΟΔ⊥ΒΓ, άρα ΟΔ διχοτόμος της $\widehat{B O \Gamma}$, οπότε θα είναι $B\widehat{O}\Delta = \Delta\widehat{O}\Gamma = x$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΓ είναι $x + y = 90^o \overset{(7)}{\Leftrightarrow}$ $\omega + y = 90^o$ άρα α⊥ΟΓ, δηλαδή ΟΓ διάμετρος του κύκλου.

Όμοια β⊥ΟΒ, οπότε ΟΒ διάμετρος του κύκλου, δηλαδή το Ο σαν τομή δύο διαμέτρων του κύκλου είναι το κέντρο του.



(Σχ. 3)