Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
Παράρτημα Αχαΐας

Ανισότητες

Συγγραφική Ομάδα:
Μπατέλης Γεώργιος
Κούλης Επαμεινώνδας
Γκουνέλα Μαρία

Βασικές Ανισότητες

Α) $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$ (1) για κάθε α, β∈R. Η ισότητα ισχύει αν α=β.

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \quad (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \\ \bullet \quad \alpha\beta \leq \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \\ \bullet \quad 2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2 \end{cases}$$

οι ισότητες ισχύουν μόνο αν α=β.

Παραδείγματα

i. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$ για κάθε α, β>0.

ii. $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \dfrac{\alpha+\beta}{4}$ ή $\dfrac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$, για κάθε α, β>0.

iii. $\dfrac{4}{\alpha+\beta} \leq \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ για κάθε α, β>0.

iv. $\dfrac{4}{\alpha+\beta} \leq \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ για κάθε α, β>0.

v. Για κάθε α, β≥0 ισχύουν

a. $\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

b. $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta} \geq \dfrac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$ ή $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2} \geq \dfrac{2}{\alpha\beta}$

c. $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Ασκήσεις

1) Αν α,β,γ>0 να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma$.

Λύση

Είναι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (1) και $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} \geq \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ (2) και $\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ (3) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) θα έχουμε το ζητούμενο.

2) Αν α, β, γ≥0 να αποδείξετε ότι

i. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) \geq (\beta+\sqrt{\alpha\gamma})^2$ (1)

ii. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq (\alpha+\sqrt{\beta\gamma})(\beta+\sqrt{\gamma\alpha})(\gamma+\sqrt{\alpha\beta})$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

(GM-1999)

Λύση

i) Η (1)$\Leftrightarrow$ $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma\geq\beta^2+\alpha\gamma+2\beta\sqrt{\alpha\gamma}\Leftrightarrow\alpha\beta+\beta\gamma\geq 2\beta\sqrt{\alpha\gamma}\Leftrightarrow$ $\alpha+\gamma\geq 2\sqrt{\alpha\gamma}$ το οποίο ισχύει.

ii) Λόγω της (1) θα έχουμε $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\geq(\beta+\sqrt{\alpha\gamma})^2$ (2) και

$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq(\gamma+\sqrt{\alpha\beta})^2$ (3)και

$(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\geq(\alpha+\sqrt{\beta\gamma})^2$ (4).

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (2), (3), (4) θα έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2\geq(\alpha+\sqrt{\beta\gamma})^2(\beta+\sqrt{\gamma\alpha})^2(\gamma+\sqrt{\alpha\beta})^2\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq(\alpha+\sqrt{\beta\gamma})(\beta+\sqrt{\gamma\alpha})(\gamma+\sqrt{\alpha\beta})$$

3) Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι:

$\dfrac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\leq\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, (Γιώργος Αποστολόπουλος)

Λύση

Είναι $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\Leftrightarrow(\sqrt{\alpha\beta})^3\leq\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^3\Leftrightarrow 8\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}\leq(\alpha+\beta)^3\Leftrightarrow$

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\leq\frac{(\alpha+\beta)^2}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\Leftrightarrow\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$$

4) Αν α, β, γ>0 να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\geq 2\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}+\dfrac{1}{\gamma+\alpha}\right)$.

Λύση

Είναι $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\geq\dfrac{4}{\alpha+\beta}$, όμοια $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\geq\dfrac{4}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\geq\dfrac{4}{\gamma+\alpha}$ και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε το ζητούμενο.

5) Αν α, β, γ≥0, να αποδείξετε ότι:

$(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2)\geq\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

Λύση

Είναι $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq\alpha\beta\geq 0$, όμοια $\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2\geq\beta\gamma\geq 0$ και $\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2\geq\gamma\alpha$. Πολλαπλασιάζοντας τις κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε το ζητούμενο.

6) Αν α, β>0 με α·β=1, να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+2002\alpha+1)(\beta^2+2002\beta+1)\geq 2004^2$.

(Ουγγαρία 2002)

Λύση

Είναι $\alpha^2+2\alpha+1\geq 4\alpha \Rightarrow \alpha^2+2010\alpha+1\geq 2012\alpha$.

Όμοια $\beta^2+2\beta+1\geq 4\beta \Rightarrow \beta^2+2010\beta+1\geq 2012\beta$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$(\alpha^2+2002\alpha+1)(\beta^2+2002\beta+1)\geq 2012^2\alpha\beta=2012^2$.

($2^{ος}$ τρόπος)

Είναι $\alpha^2+2002\alpha+1\geq 2004\alpha$ διότι $\alpha^2+2002\alpha+1-2004\alpha=\alpha^2-2\alpha+1\geq 0$.

Όμοια $\beta^2+2002\beta+1\geq 2004\beta$ κ.λπ..

7) Αν α, β≥0, να αποδειχθεί ότι $\alpha+\beta\geq\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}}+\sqrt{\alpha\beta}$. (GM-2002)

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}}=x$ και $\sqrt{\alpha\beta}=y$, οπότε θα έχουμε:

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=x^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=2x^2$ και $\alpha\beta=y^2$ (1).

Τότε η ζητούμενη σχέση γίνεται $\alpha+\beta\geq x+y$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$(\alpha+\beta)^2\geq(x+y)^2$, αρκεί $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\geq x^2+y^2+2xy$ και λόγω της (1) αρκεί $2x^2+2y^2\geq x^2+y^2+2xy$, αρκεί $x^2+y^2-2xy\geq 0$ που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν x=y, δηλαδή $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=x^2=y^2=\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$ **α=β.**

8) Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι:

i. **(α+β) (β+γ) (γ+α)≥8αβγ**

ii. $\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8$.

Λύση

I. Είναι $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}\\ \beta+\gamma\geq 2\sqrt{\beta\gamma}\\ \gamma+\alpha\geq 2\sqrt{\gamma\alpha}\end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq 8\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=8\alpha\beta\gamma$

II. Είναι $\left.\begin{array}{l}\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\geq 2\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}\\ \beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\geq 2\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}\\ \gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}\geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}\cdot\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=8$.

9) Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu \in \mathbf{R}_+$ τέτοιοι ώστε $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_\nu = 1$ να αποδείξετε ότι $(1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot\cdots\cdot(1-\alpha_\nu) \geq 2^\nu$.

Λύση

Είναι $(1-\alpha_1) \geq 2\sqrt{\alpha_1}$ όμοια

$(1-\alpha_2) \geq 2\sqrt{\alpha_2}$ όμοια

.....

.....

$(1-\alpha_\nu) \geq 2\sqrt{\alpha_\nu}$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε:

$(1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot\cdots\cdot(1-\alpha_\nu) \geq 2^\nu\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu} = 2^\nu$.

Β) Για κάθε α, β, γ∈R να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (1)

ii. $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$

iii. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

Λύση

Ι. Η (1)$\Leftrightarrow$ $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ΙΙ, ΙΙΙ. ανάλογα

<u>Παραδείγματα</u>

i. Αν α, β, γ∈R και αβγ=1, να αποδειχθεί ότι: $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \alpha+\beta+\gamma$.

Λύση

Στην σχέση $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ θέτουμε όπου α το α^2, όπου β το β^2 και όπου γ το γ^2 και θα έχουμε: $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ (1).

Είναι $\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta = \dfrac{1}{\gamma} \\ \alpha\gamma = \dfrac{1}{\beta} \\ \beta\gamma = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$ άρα ή (1) γίνεται:

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ (2).

Είναι $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\geq\frac{2}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\geq\frac{2}{\beta\gamma}$ και $\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}\geq\frac{2}{\gamma\alpha}$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε: $2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\geq 2\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)$ άρα η (2) γίνεται

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\geq\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\alpha+\beta+\gamma.$$

ii. Αν x, y, z>0 να δείξετε ότι $xyz\leq\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ (Poland Olympiad)

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$ (1).

Είναι $(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2\geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ (2).

Όμοια είναι

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2=$$
$$xyz(x+y+z) \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε την (1).

iii. **α)** Αν α, β, γ>0 να δείξετε ότι $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

β) Αν α, β, γ>0 να δείξετε ότι

$$(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(2\beta^2+\gamma^2+\alpha^2)(2\gamma^2+\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2.$$

Λύση

α) Αρκεί $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha^2+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta\gamma$, αρκεί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta\gamma$ που ισχύει.

β) Είναι $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$, όμοια $2\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\geq(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)$ και $2\gamma^2+\alpha^2+\beta^2\geq(\gamma+\alpha)(\gamma+\alpha)$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

Γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$, γενικά $\alpha^{\nu}+\frac{1}{\alpha^{\nu}}\geq 2$ για κάθε α>0.

ii. $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$ για κάθε α<0.

iii. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$ αν α και β ομόσημοι.

iv. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$ αν α και β ετερόσημοι.

Παραδείγματα

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\geq 6$ (1).

Λύση

Είναι $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=$

$\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)\geq 2+2+2=6$.

ii. Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: $\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+1+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 27$.

Λύση

Είναι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2\Leftrightarrow\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\geq 3$, όμοια $\beta+1+\frac{1}{\beta}\geq 3$ και $\gamma+1+\frac{1}{\gamma}\geq 3$ με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε το ζητούμενο.

iii. Αν α, β, γ>0, να αποδειχθεί ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$.

Λύση

Με πράξεις αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}\geq 6$.

Είναι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$ και $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\geq 2$ και $\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\geq 2$ κ.λπ..

iv. Αν x>0 να δείξετε ότι $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\geq 7x^3$.

Λύση

Διαιρούμε δια x^3 και θα έχουμε: $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3\geq 7$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\geq 7$, αρκεί

$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 6$ που ισχύει.

v. Αν x>0 και $\nu\in\mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2\nu}\geq(2\nu+1)x^{\nu}$ (1).

Λύση

Η (1)$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x^{\nu}}+\dfrac{1}{x^{\nu-1}}+\dfrac{1}{x^{\nu-2}}+\cdots+\dfrac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots+x^{\nu}\geq 2\nu+1\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{x^{\nu}}+\frac{1}{x^{\nu-1}}+\frac{1}{x^{\nu-2}}+\cdots+\frac{1}{x}+x+x^2+\cdots+x^{\nu}}_{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma 2\nu}\geq 2\nu\Leftrightarrow$$

$\left(\dfrac{1}{x^{\nu}}+x^{\nu}-2\right)+\left(\dfrac{1}{x^{\nu-1}}+x^{\nu-1}-2\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{x}+x-2\right)\geq 0$ που ισχύει διότι είναι $\alpha^{\nu}+\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}\geq 2$ για α>0.

vi. Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\nu}\neq 0$ να δείξετε ότι: $\dfrac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_{\nu}^2)}{\left|x_1\cdot x_2\cdots x_{\nu}\right|}\geq 2^{\nu}$.

(Περιοδικό Ευκλείδης Β τεύχος 9)

Λύση

Είναι $\dfrac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_{\nu}^2)}{\left|x_1\cdot x_2\cdots x_{\nu}\right|}=\dfrac{1+x_1^2}{|x_1|}\cdot\dfrac{1+x_2^2}{|x_2|}\cdots\cdot\dfrac{1+x_{\nu}^2}{|x_{\nu}|}=$

$$=\frac{1+|x_1^2|}{|x_1|}\cdot\frac{1+|x_2^2|}{|x_2|}\cdots\cdot\frac{1+|x_{\nu}^2|}{|x_{\nu}|}==\left(|x_1|+\frac{1}{|x_1|}\right)\cdot\left(|x_2|+\frac{1}{|x_2|}\right)\cdots\cdot\left(|x_{\nu}|+\frac{1}{|x_{\nu}|}\right).$$

Είναι $|x_1|+\dfrac{1}{|x_1|}\geq 2$, $|x_2|+\dfrac{1}{|x_2|}\geq 2,\ldots\ldots,|x_{\nu}|+\dfrac{1}{|x_{\nu}|}\geq 2$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε:

$$\left(|x_1|+\frac{1}{|x_1|}\right)\cdot\left(|x_2|+\frac{1}{|x_2|}\right)\cdots\cdot\left(|x_{\nu}|+\frac{1}{|x_{\nu}|}\right)\geq 2\cdot 2\cdots\cdot 2=2^{\nu}.$$

vii. Αν x>0 να δείξετε ότι $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}+\dfrac{1}{x}>4$.

(ΠΜΔ 10/11/90) Α Λυκείου

Λύση

Είναι $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}+\dfrac{1}{x}>\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}+\dfrac{1}{x}=x+2+\dfrac{1}{x}=$

$2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geq 2+2=4$.

Ανισότητα Buniakowsky-Cauchy-Schwarz (B-C-S).

Δ) Να αποδείξετε τις ανισότητες

i. $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$ για κάθε α, β,x,y∈R.

Απόδειξη

Πράξεις και καταλήγουμε στην $(\alpha y-\beta x)^2=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2\geq 0$ που ισχύει.

Το ίσον ισχύει αν $\alpha y-\beta x=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$.

ii. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$ για κάθε α, β, γ,x,y,z∈R.

Απόδειξη

Πράξεις και καταλήγουμε στην

$(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha z-\gamma x)^2+(\beta z-\gamma y)^2=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ x & z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ y & z\end{vmatrix}^2\geq 0$ που ισχύει.

Το ίσον ισχύει αν $\alpha y-\beta x=0$ και $\alpha z-\gamma x=0$ και $\beta z-\gamma y=0$.

Δηλαδή $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ x & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ y & z\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$.

iii. Αν α, β, γ>0, να αποδειχθεί ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 3^2$.

Απόδειξη

(1^{ος} τρόπος)

Πράξεις

(2^{ος} τρόπος) προηγούμενη ανισότητα

Είναι $\sqrt{\alpha}^2=\alpha,\ \sqrt{\beta}^2=\beta,\ \sqrt{\gamma}^2=\gamma$, οπότε θα έχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\left(\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2+\sqrt{\gamma}^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^2\right)\geq$$

$$\left(\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)+\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)+\sqrt{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right)^2=3^2=9.$$

iv. $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\nu^2)\geq(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_\nu x_\nu)^2$,

Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\alpha_1}{x_1}=\frac{\alpha_2}{x_2}=\cdots=\frac{\alpha_\nu}{x_\nu}$.

Η παραπάνω ανισότητα (B-C-S) μπορεί να γραφεί και έτσι:

$$\sum_{i=1}^{v}\alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{v} x_i \geq \left(\sum_{i=1}^{v}\alpha_i x_i\right)^2.$$

<u>**Παραδείγματα**</u>

i. Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2}$ **(Βασική πρόταση).**

Λύση

Είναι $\mathbf{3(x^2+y^2+z^2)=(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2}$.

ii. $\mathbf{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\geq\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2}$.

Λύση

Προκύπτει από το προηγούμενο παράδειγμα.

iii. Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{v(x_1^2+x_2^2+\cdots x_v^2)\geq(x_1+x_2+\cdots+x_v)^2}$.

Λύση

Είναι γενίκευση του πρώτου παραδείγματος.

Θέτουμε $\mathbf{(\alpha_1=\alpha_2=\cdots\alpha_v=1}$ και από την ανισότητα (B-C-S) έχουμε το ζητούμενο.

iv. Αν $\mathbf{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leq 1}$ να δείξετε ότι $\mathbf{\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}\geq(x+y+z)^2}$.

(Περιοδικό Ευκλείδη Β)

Λύση

Είναι $\mathbf{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2+\left(\dfrac{z}{\gamma}\right)^2\right)\geq\left(\alpha\cdot\dfrac{x}{\alpha}+\beta\cdot\dfrac{y}{\beta}+\gamma\cdot\dfrac{z}{\gamma}\right)^2\Leftrightarrow}$

$$\mathbf{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right)\geq(x+y+z)^2\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\geq\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(x+y+z)^2\geq 1\cdot(x+y+z)^2}.$$

v. Αν $\mathbf{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_v\in R_+^*}$ να δείξετε ότι:

$\mathbf{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_v^2\geq\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_v\alpha_1}$. (Περιοδικό Ευκλείδη Β)

Λύση

Από την ανισότητα (B-C-S) θα έχουμε

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2)(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots+\alpha_\nu^2+\alpha_1^2)\geq(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu\alpha_1)^2$$
$$\Leftrightarrow\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2\geq\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu\alpha_1.$$

vi. Αν x, y, z>0 και $\mathbf{x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ να δείξετε ότι $\mathbf{xy+yz+zx\geq 3xyz}$.

Λύση

Είναι $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\geq 9\Leftrightarrow\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)^2\geq 9\Leftrightarrow$
$xy+yz+zx\geq 3xyz$.

vii. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}_+^*$ να δείξετε ότι: $\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\geq\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$.

(Περιοδικό Ευκλείδη Β)

Λύση

Αρκεί $2(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)\geq 9$ αρκεί

$(2\alpha+2\beta+2\gamma)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)\geq 9$ αρκεί

$\left((\alpha+\beta)+\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\right)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)\geq 3^2$ που ισχύει.

viii. Να δείξετε ότι $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\geq\nu^2$, για κάθε $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\in\mathbf{R}_+^*$.

Λύση

Γενίκευση προηγούμενου παραδείγματος.

ix. Αν $\alpha=yz+5$, $\beta=xz+5$. $\gamma=xy+5$ και $xy+yz+zx=1$ με $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\leq 4\sqrt{3}$.

Λύση

Από την ανισότητα (B-C-S) θα έχουμε:

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$ και για x=y=z=1 θα έχουμε $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$ (1).

Θέτουμε $\alpha=\sqrt{\alpha}$, $\beta=\sqrt{\beta}$ και $\gamma=\sqrt{\gamma}$ στη σχέση (1) και θα έχουμε

$$3(\alpha+\beta+\gamma)\geq(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2 \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2 \leq 3(yz+xz+xy+15) \Leftrightarrow$$
$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2 \leq 3(1+15) \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2 \leq 3\cdot 16 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma} \leq 4\sqrt{3}.$$

x. Αν α, β, γ, δ>0 να αποδείξετε ότι:

$$(1+\alpha^4)(1+\beta^4)(1+\gamma^4)(1+\delta^4)\geq(1+\alpha\beta\gamma\delta)^4.$$

Λύση

Είναι $\left(1^2+(\alpha^2)^2\right)\left(1^2+(\beta^2)^2\right)\geq\left(1+(\alpha^2\beta^2)\right)^2$ (1).

Όμοια $\left(1^2+(\gamma^2)^2\right)\left(1^2+(\delta^2)^2\right)\geq\left(1+(\gamma^2\delta^2)\right)^2$ (2).

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) και (2) θα έχουμε:

$(1+\alpha^4)(1+\beta^4)(1+\gamma^4)(1+\delta^4)\geq\left(1+(\alpha^2\beta^2)\right)^2\left(1+(\gamma^2\delta^2)\right)^2$ (3).

Είναι $\left(1^2+(\alpha^2\beta^2)\right)\left(1^2+(\gamma^2\delta^2)\right)\geq\left(1+\alpha\beta\gamma\delta\right)^2$ (4).

Η (3) λόγω της (4) δίνει το ζητούμενο.

xi. Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$.

Λύση

Στην ανισότητα $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$ θέτουμε όπου α το $\sqrt{\alpha\beta}$, όπου β το $\sqrt{\beta\gamma}$, όπου γ το $\sqrt{\gamma\alpha}$, όπου x το $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, όπου y το $\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ και όπου z το $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, οπότε θα έχουμε:

$$(\sqrt{\alpha\beta}^2+\sqrt{\beta\gamma}^2+\sqrt{\gamma\alpha}^2)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}^2+\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}^2+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}^2\right)\geq\left(\sqrt{\alpha\beta\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\beta\gamma\frac{\beta}{\gamma}}+\sqrt{\gamma\alpha\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2.$$

Δ) Να αποδείξετε τις ανισότητες

i. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ με α, β, γ≥0.

ii. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\geq 9\alpha\beta\gamma$ με α, β, γ≥0.

iii. $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\cdot\alpha_\nu}\geq\dfrac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}}$

με $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu>0$.

Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου-Αρμονικού μέσου

Στα επόμενα, το σύμβολο n θα δηλώνει έναν θετικό ακέραιο, εκτός αν γίνει σαφής μνεία για το αντίθετο.

Ορισμός 1.1

Ονομάζουμε αριθμητικό μέσο n θετικών πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ τον $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Ορισμός 1.2

Ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο n θετικών πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ τον $\sqrt[n]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n}$.

Ο Augustin Louis Cauchy στο περίφημο βιβλίο του Cours d' Analyse το 1821 διατυπώνει και αποδεικνύει το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.1 [Cauchy]

Για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ισχύει:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n}.$$

1η Απόδειξη [G.Pólya]

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$ είναι κυρτή και η εφαπτομένη της στο σημείο της Α(0,1) είναι η y=x+1, άρα η C_f είναι ¨πάνω¨ από την y=x+1 σε όλα τα σημεία της εκτός από το Α στο οποίο ταυτίζεται. Άρα $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα αν και μόνο αν x=0 ή ισοδύναμα, αν θέσουμε όπου x το x-1 $e^{x-1} \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$ (1), με την ισότητα να ισχύει αν-ν x=1.

Ας θέσουμε $\mathbf{A} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$ **και** $\mathbf{G} = \sqrt[n]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n}$.

Αν στην (1) θέσουμε όπου $\mathbf{x} = \frac{a_i}{A}, \mathbf{i} = 1,2, \dots, n$, έχουμε

$$e^{\frac{\alpha_1}{A} - 1} \geq \frac{\alpha_1}{A}, \quad e^{\frac{\alpha_2}{A} - 1} \geq \frac{\alpha_2}{A}, \dots, \quad e^{\frac{\alpha_n}{A} - 1} \geq \frac{\alpha_n}{A}$$

Οι οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν

$$e^{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{A} - n} \geq \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{A^n} \Leftrightarrow e^{n-n} \geq \frac{6^n}{A^n} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{6^n}{A^n} \Leftrightarrow A^n \geq 6^n \Leftrightarrow A \geq 6,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\frac{\alpha_1}{A} = \frac{\alpha_2}{A} = \dots = \frac{\alpha_n}{A} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n$.

2η Απόδειξη [Cauchy]

Βήμα 1ο : Έστω ότι η αποδεικτέα σχέση ισχύει για n=κ, όπου κ τυχών ακέραιος, με $\kappa \geq 2$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για n=κ-1. Η ισχύς της

$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n}$ (*) για n=κ σημαίνει ακριβώς ότι

$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\kappa}{\kappa} \geq \sqrt[\kappa]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_\kappa}$ $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa \in (0, +\infty)$.

Αν στην προηγούμενη θέσουμε όπου $\alpha_\kappa = A_{\kappa-1}$, όπου $A_{\kappa-1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\kappa-1}}{\kappa-1}$, παίρνουμε:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\kappa-1} + A_{\kappa-1}}{\kappa} \geq \sqrt[\kappa]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_{\kappa-1} . A_{\kappa-1}} \Leftrightarrow$$

$\left(\frac{(\kappa-1)A_{\kappa-1} + A_{\kappa-1}}{\kappa}\right)^\kappa \geq \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\kappa-1} A_{\kappa-1}$ και αν

$G_{\kappa-1} = \sqrt[\kappa-1]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_{\kappa-1}}$, η προηγουμένη γράφεται ισοδύναμα

$$A_{\kappa-1}^{\kappa} \geq G_{\kappa-1}^{\kappa-1} A_{\kappa-1} \Leftrightarrow A_{\kappa-1}^{\kappa-1} \geq G_{\kappa-1}^{\kappa-1} \Leftrightarrow A_{\kappa-1} \geq G_{\kappa-1}.$$

Βήμα 2ο : Θα δείξουμε ότι αν ισχύει για n=l θα ισχύει και για n=2l, όπου l τυχών θετικός ακέραιος. Πράγματι, η ισχύς για n=l σημαίνει ακριβώς ότι $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l}{l} \geq \sqrt[l]{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_l}$. (1)

Άρα $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l}{2l} = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_l + \alpha_{l+1} + \dots + \alpha_{2l}}{2l} =$

$= \dfrac{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_l}{l}+\frac{\alpha_{l+1}+\dots+\alpha_{2l}}{l}}{2} \geq \sqrt{\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_l}{l}\cdot\dfrac{\alpha_{l+1}+\dots+\alpha_{2l}}{l}}$ και από την (1) έχω $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_l}{2l} \geq$ $\sqrt{\sqrt[l]{\alpha_1.\alpha_2\dots\alpha_l}\sqrt[l]{\alpha_{l+1}\dots\alpha_{2l}}} = \sqrt[2l]{\alpha_1.\alpha_2\dots\alpha_{2l}}$.

Χρησιμοποιήσαμε εδώ ότι η $(*)$ ισχύει για n=2, αφού είναι
$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}=\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2})^2\geq 0$.
Επειδή τώρα η ακολουθία διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{+\infty}$, με $I_n=(2^n,2^{n+1}]$ αποτελεί μία διαμέριση του $(1,+\infty]$ από τα βήματα 1 και 2 έπεται το ζητούμενο.

<u>3η Απόδειξη</u>
Θα δείξουμε πρώτα το ακόλουθο
<u>Λήμμα</u>
Για όλες τις n-δες θετικών πραγματικών $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ ισχύει

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n}\right)^n \geq \alpha_1\left(\frac{\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n-1}\right)^{n-1}$$

<u>Απόδειξη</u>
Η αποδεικτέα είναι ισοδύναμη με την

$$(n-1)^{n-1} \geq \frac{a_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}}\cdot\frac{(\alpha_2+\dots+\alpha_n)^{n-1}}{\left(\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}\right)^{n-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}}}\cdot\frac{\alpha_2+\dots+\alpha_n}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}}}\cdot\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n-\alpha_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}}}\cdot\left(n-\frac{a_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq x(n-x^{n-1}),\ \text{όπου } x=\sqrt[n-1]{\frac{a_1}{\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}}}$$

Σύμφωνα τώρα με την ανισότητα Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na,$
$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall\alpha\epsilon(-1,+\infty)$
Άρα $x^n=(1+(x-1))^n \geq 1+n(x-1)=1+nx-n \Leftrightarrow$
$n-1\geq nx-x^n \Leftrightarrow n-1\geq x(n-x^{n-1})$
Με διαδοχικές εφαρμογές του ήδη αποδειχθέντος λήμματος, έχουμε

$$\left(\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}\right)^n \geq \alpha_1\left(\frac{\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_1a_2\left(\frac{\alpha_3+\dots+\alpha_n}{n-2}\right)^{n-2} \geq$$

$$\geq a_1a_2a_3\left(\frac{\alpha_4+\dots+\alpha_n}{n-3}\right)^{n-3} \geq \dots \geq a_1\dots a_{n-1}\left(\frac{\alpha_n}{1}\right)^1 = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$$

Άρα $\left(\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}\right)^n \geq \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \Leftrightarrow (*)$

Παραδείγματα

i. Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: **(α+β)(β+γ)(γ+α)≥8αβγ.**

Λύση ($2^{ος}$ τρόπος)

Είναι $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}\geq 2$, όμοια $\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta\gamma}}\geq 2$ και $\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma\alpha}}\geq 2$ με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

ii. Αν x, y, ω>0 να αποδείξετε ότι $\frac{xy}{x^3+y^3+1}+\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}+\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\leq 1$.

Λύση

Είναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma$ και θέτοντας α=x. β=y και γ=1 θα έχουμε: $x^3+y^3+1^3\geq 3xy1\Leftrightarrow\frac{1}{x^3+y^3+1}\leq\frac{1}{3xy}\Leftrightarrow\frac{xy}{x^3+y^3+1}\leq\frac{1}{3}$.

Όμοια $\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}\leq\frac{1}{3}$ και $\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\leq\frac{1}{3}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

iii. Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: $\frac{2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}+\frac{6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\geq 8$.

Λύση

Είναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}\geq 3\Leftrightarrow\frac{2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}\geq 6$ (1).

Επίσης $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2\Leftrightarrow\frac{6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\geq 2$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) θα τη ζητούμενη.

iv. Αν α, β, γ, δ>0 και αβγδ=1, να αποδείξετε ότι:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$.

Λύση

Είναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma=\frac{3}{\delta}$, $\beta^3+\gamma^3+\delta^3\geq 3\beta\gamma\delta=\frac{3}{\alpha}$,

$$\gamma^3+\delta^3+\alpha^3 \geq 3\gamma\delta\alpha = \frac{3}{\beta}, \quad \delta^3+\alpha^3+\beta^3 \geq 3\delta\alpha\beta = \frac{3}{\gamma}$$ και με πρόσθεση

κατά μέλη θα έχουμε $3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3) \geq \frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\gamma}+\frac{3}{\delta} \Leftrightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3 \geq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$.

v. Αν α, β, γ>0, να αποδειχτεί ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq 9\alpha\beta\gamma$.

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{c}\alpha+\beta+\gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq 9\sqrt[3]{\alpha^3\beta^3\gamma^3} \Rightarrow$

$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq 9\alpha\beta\gamma$.

vi. Να δείξετε ότι $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right) \geq \nu^2$, για κάθε $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu \in \mathbf{R}_+^*$.

Λύση

(1ος τρόπος)

Βλέπε παραπάνω με την ανισότητα (B-C-S)

(2ος τρόπος)

Είναι $\left.\begin{array}{c}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu \geq \nu\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\cdot\alpha_\nu} \\ \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu} \geq \nu\cdot\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{\alpha_\nu}}\end{array}\right\}$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη θα έχουμε το ζητούμενο.

vii. Αν α, β, γ>0 να αποδειχτεί ότι: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq \alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$.

Λύση

Είναι $\alpha^3+\alpha^3+\beta^3 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha^3\alpha^3\beta^3} = 3\alpha^2\beta$ όμοια

$\beta^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\beta^3\beta^3\gamma^3} = 3\beta^2\gamma$ και

$\gamma^3+\gamma^3+\alpha^3 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\gamma^3\gamma^3\alpha^3} = 3\gamma^2\alpha$ και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε: $3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) \geq 3(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha) \Leftrightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq \alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$.

viii. Αν α, β, γ>0 να αποδειχτεί ότι: $\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma) \geq \sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta\gamma}+\sqrt[3]{\gamma\alpha}-1$.

Λύση

Είναι $\alpha+\beta+1 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta}$ όμοια

$\beta+\gamma+1 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\beta\gamma}$ και

$\gamma+\alpha+1 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\gamma\alpha}$ και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε:

$2(\alpha+\beta+\gamma)+3 \geq 3\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta\gamma}+\sqrt[3]{\gamma\alpha}\right) \Rightarrow$

$\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+1 \geq \sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta\gamma}+\sqrt[3]{\gamma\alpha} \Rightarrow$το ζητούμενο.

ix. Αν α, β, γ, δ≥0 να αποδειχτεί ότι:

$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)(\delta^2+\delta+1) \geq 81\alpha\beta\gamma\delta$.

Λύση

Είναι $\alpha^2+\alpha+1 \geq 3\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\alpha\cdot 1} = 3\sqrt[3]{\alpha^3} = 3\alpha$, όμοια

$\beta^2+\beta+1 \geq 3\sqrt[3]{\beta^2\cdot\beta\cdot 1} = 3\sqrt[3]{\beta^3} = 3\beta$, $\gamma^2+\gamma+1 \geq 3\sqrt[3]{\gamma^2\cdot\gamma\cdot 1} = 3\sqrt[3]{\gamma^3} = 3\gamma$ και

$\delta^2+\delta+1 \geq 3\sqrt[3]{\delta^2\cdot\delta\cdot 1} = 3\sqrt[3]{\delta^3} = 3\delta$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε το ζητούμενο.

x. Αν α, β, γ>0 να αποδειχτεί ότι: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$.

Λύση

Απλή εφαρμογή της ανισότητας Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού μέσου (Α-Γ-Α).

xi. Αν $x_1, x_2, \cdots, x_\nu \in \mathbb{R}_+$ τότε $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}+\frac{x_\nu}{x_1} \geq \nu$ για κάθε ν∈Ν.

(Περιοδικό Ευκλείδης Β τόμος 1 τεύχος 3 1977)

Λύση

Είναι $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \cdots, \frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}, \frac{x_\nu}{x_1} \in \mathbb{R}_+$ και $\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}\cdot\frac{x_\nu}{x_1} = 1$ άρα

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}+\frac{x_\nu}{x_1} \geq \nu$.

xii. Αν α, β, γ>0 να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta} \geq \alpha+\beta+\gamma$.

Λύση

Είναι $\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\beta+\gamma \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}\cdot\beta\cdot\gamma}=3\alpha$, όμοια

$\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\gamma+\alpha \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\cdot\gamma\cdot\alpha}=3\beta$ και

$\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}+\alpha+\beta \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\cdot\alpha\cdot\beta}=3\gamma$ και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε

$$\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}+2(\alpha+\beta+\gamma)\geq 3(\alpha+\beta+\gamma)\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\alpha+\beta+\gamma .$$

E) Αν α, β, γ>0 τότε:

i. $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$

ii. $\alpha^4+\beta^4 \geq \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

iii. $\alpha^5+\beta^5 \geq \alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)\geq \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

iv. $\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} \geq \sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}$

<u>Παραδείγματα</u>

i. Αν x, y, z>0 να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)}{x^3y^3z^3}\geq\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Λύση

Είναι $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$

Όμοια $y^3+z^3 \geq yz(y+z)$ και

$z^3+x^3 \geq zx(z+x)$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε:

$$(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)\geq x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x)\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)}{x^3y^3z^3}\geq\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

ii. Αν α, β, γ>0 να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma)^{-1}+(\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma)^{-1}+(\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma)^{-1}\geq(\alpha\beta\gamma)^{-1}.$$

(USA Olympiad)

Λύση

Είναι $\alpha^3+\beta^3\geq\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma\geq\alpha\beta\gamma+\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma\geq\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma}\leq\dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)}$ (1).

Όμοια $\dfrac{1}{\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma}\leq\dfrac{1}{\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$ (2) και

$\dfrac{1}{\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma}\leq\dfrac{1}{\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) θα έχουμε:

$$(\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma)^{-1}+(\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma)^{-1}+(\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma)^{-1}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{1}{\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)}\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

iii. Αν α, β, γ>0 με αβγ=1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha}\leq 1.$$

(Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, Shortlist – 1996)

Λύση

Είναι $\alpha^5+\beta^5\geq\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)\geq\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$

$\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta\geq\alpha\beta+\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}\leq\dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)}\Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}\leq\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ (1).

Όμοια $\dfrac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma}\leq\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ (2) και $\dfrac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha}\leq\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) θα έχουμε το ζητούμενο.

ΣΤ) Αν α, β, γ>0 και x, y, z∈R τότε:

i. $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}\geq\dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$

ii. $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

Απόδειξη

Ανισότητα (B-C-S)

$$\left[\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\beta}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{\gamma}}\right)^2\right]\left[\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2+\sqrt{\gamma}^2\right]\geq\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}+\frac{x}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\beta}++\frac{x}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}\right)(\alpha+\beta+\gamma)\geq(x+y+z)^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

iii. $\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{x_v^2}{\alpha_v}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_v)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_v}$ ή $\sum_{i=1}^{v}\frac{x_i^2}{\alpha_i}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{v}\alpha_i}$ γενίκευση.

Απόδειξη
Ανισότητα (B-C-S)

<u>Παραδείγματα</u>

i. Αν α, β, γ>0 και α+β+γ=1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq 1.$$ (GM -2000)

Λύση
Είναι

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq\frac{(\alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\alpha)^2}{\gamma+1+\alpha+1+\beta+1}=\frac{[2(\alpha+\beta+\gamma)]^2}{\alpha+\beta+\beta+3}=$$

$$=\frac{4}{4}=1.$$

ii. Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και αβγ=1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\geq\frac{3}{2}.$$ ($36^η$ I.M.O, 1995)

Λύση

Είναι $\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{1^2}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha(\beta+\gamma)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}$ (1).

Όμοια $\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}=\frac{(\gamma\alpha)^2}{\beta\gamma+\beta\alpha}$ (2) και $\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}=\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha+\gamma\beta}$ (3).

Άρα $\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}+\frac{(\gamma\alpha)^2}{\beta\gamma+\beta\alpha}+\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha+\gamma\beta}\geq$

$$\frac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta\alpha+\gamma\alpha+\gamma\beta}=\frac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2}{2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}=\frac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}{2}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}{2}\geq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\geq 3$.

Είναι αβγ=1, οπότε (βγ)(γα)(αβ)=1, άρα $\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\geq 3$.

Επίσης μπορούσαμε να το αποδείξουμε με την ανισότητα (Α-Γ-Α), δηλαδή

$\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{3}\geq\sqrt[3]{\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\alpha\beta}\Leftrightarrow\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\geq 3\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}=3$.

iii. Αν α, β, γ, δ>0 και α+β+γ+δ=1, να αποδείξετε ότι:

$\dfrac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{\gamma+\delta}+\dfrac{\delta^2}{\delta+\alpha}\geq\dfrac{1}{2}$. (Ιρλανδία 1999)

Λύση

Είναι $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{\gamma+\delta}+\dfrac{\delta^2}{\delta+\alpha}\geq\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}=\dfrac{1}{2}$.

iv. Αν α, β>1, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2}{\beta-1}+\dfrac{\beta^2}{\alpha-1}\geq 8$. (Ρωσία 1992).

Λύση

Είναι $\dfrac{\alpha^2}{\beta-1}+\dfrac{\beta^2}{\alpha-1}\geq\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha+\beta-2}$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha+\beta-2}\geq 8$.

Αρκεί $(\alpha+\beta)^2-8(\alpha+\beta)+16\geq 0$, αρκεί $[(\alpha+\beta)-4]^2\geq 0$ που ισχύει.

v. Αν ν≥2 και $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{\nu-1}$ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\nu-1}=1$ και $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_\nu$ είναι τυχαίοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\beta_1^2+\frac{\beta_2^2}{\alpha_1}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{\beta_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}}\geq 2\beta_1(\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_\nu).$$

(Γιουγκοσλαβία 2000)

Λύση

Είναι $\dfrac{\beta_2^2}{\alpha_1}+\dfrac{\beta_3^2}{\alpha_2}+\cdots+\dfrac{\beta_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}}\geq\dfrac{(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\nu-1}}=(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^2\Leftrightarrow$

$\beta_1^2+\dfrac{\beta_2^2}{\alpha_1}+\dfrac{\beta_3^2}{\alpha_2}+\cdots+\dfrac{\beta_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}}\geq\beta_1^2+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^2$ (1).

Ισχύει $x^2+y^2\geq 2xy$, οπότε αν θέσουμε $x=\beta_1$ και $y=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu$ θα έχουμε $\beta_1^2+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^2\geq 2\beta_1^2(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)$ (2).

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$\beta_1^2+\dfrac{\beta_2^2}{\alpha_1}+\dfrac{\beta_3^2}{\alpha_2}+\cdots+\dfrac{\beta_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}}\geq 2\beta_1(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)$.

vi. Αν α, b, c είναι θετικοί πραγματικοί τέτοιοι ώστε ab+bc+cα=3, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{2\alpha^3+1}+\frac{1}{2b^3+1}+\frac{1}{2c^3+1}\geq 1$.

(Ουκρανία 2016) (Περιοδικό Ευκλείδης Β τεύχος 110)

Λύση

Από τη δοθείσα σχέση θα έχουμε $1=\frac{\alpha b+bc+c\alpha}{3}\geq\sqrt[3]{(\alpha bc)^2}\Rightarrow \alpha bc\leq 1\Rightarrow$

$\alpha\leq\frac{1}{bc}$, $b\leq\frac{1}{c\alpha}$, $c\leq\frac{1}{\alpha b}\Rightarrow \alpha+b+c\leq\frac{1}{\alpha b}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{c\alpha}$.

Στη συνέχεια από την ανισότητα $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$, α, β, γ>0, θα έχουμε: $\frac{1}{2\alpha^3+1}+\frac{1}{2b^3+1}+\frac{1}{2c^3+1}=\frac{\frac{1}{\alpha^2}}{2\alpha+\frac{1}{\alpha^2}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{2b+\frac{1}{b^2}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{2c+\frac{1}{c^2}}\geq$

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(\alpha+b+c)+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\geq\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\alpha b}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{c\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=1.$$

<u>Ανισότητα Hölder</u> (Μπάμπης Στεργίου)

Ζ) Πρώτη μορφή

Αν α, β, γ, x, y, z, κ, λ, μ θετικοί αριθμοί τότε ισχύει:

i. $\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq \alpha x+\beta y$ η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$.

ii. $\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(x^3+y^3+z^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3\right)^{\frac{1}{3}}\geq \alpha x\kappa+\beta y\lambda+\gamma z\mu$ η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$ και $\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu}$.

Δεύτερη μορφή

Αν α, β, γ, x, y, z, θετικοί αριθμοί και μ, ν∈N* με $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$ τότε ισχύει:

i. $\left(\alpha^{\mu}+\beta^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\cdot\left(x^{\nu}+y^{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}\geq \alpha x+\beta y$. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$.

ii. $\left(\alpha^{\mu}+\beta^{\mu}+\gamma^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\cdot\left(x^{\nu}+y^{\nu}+z^{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}\geq \alpha x+\beta y+\gamma z$ η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$.

Τρίτη μορφή

Αν α, β, γ, x, y, z, θετικοί αριθμοί τότε ισχύει:

i. $\left(\alpha+\beta\right)^{\mu}\cdot\left(x+y\right)^{\nu}\geq \alpha^{\mu}x^{\nu}+\beta^{\mu}y^{\nu}$, όπου μ, $\nu\in Q^*$, με **μ+ν=1**. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$.

ii. $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^{\mu}\cdot\left(x+y+z\right)^{\nu}\geq \alpha^{\mu}x^{\nu}+\beta^{\mu}y^{\nu}+\gamma^{\mu}z^{\nu}$, όπου μ, $\nu\in Q^*$, με **μ+ν=1**. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$.

iii. $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^{p}\cdot\left(x+y+z\right)^{q}\cdot\left(\kappa+\lambda+\mu\right)^{r}\geq \alpha^{p}x^{q}\kappa^{r}+\beta^{p}y^{q}\lambda^{r}+\gamma^{p}z^{q}\mu^{r}$, όπου p,q,r θετικοί αριθμοί με p+q+r=1. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$ και $\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu}$.

iv. $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)^{\mu_1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^{\mu_2}\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)^{\mu_\kappa}\geq$ $\alpha_1^{\mu_1}\beta_1^{\mu_2}\cdots x_1^{\mu_\kappa}+\alpha_2^{\mu_1}\beta_2^{\mu_2}\cdots x_2^{\mu_\kappa}+\cdots+\alpha_\nu^{\mu_1}\beta_\nu^{\mu_2}\cdots x_\nu^{\mu_\kappa}$ με $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\kappa=1$ (οι $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_\kappa$ είναι θετικοί αριθμοί).. Η ισότητα ισχύει όταν οι ν-άδες $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu)$, $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu)$,..., $(x_1,x_2,\cdots,x_\nu)$ είναι ανάλογες.

Οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν και στην περίπτωση που οι μ,ν είναι τυχαίοι θετικοί ρητοί αριθμοί ή ακόμη πραγματικοί αριθμοί.

<u>**Παραδείγματα**</u>

i. Αν α, β θετικοί αριθμοί να δείξετε ότι $32(\alpha^6+\beta^6)\geq(\alpha+\beta)^6$. (Μπάμπης Στεργίου)

Λύση

Είναι 32=2^5. Από την ανισότητα Hölder (δεύτερη μορφή) επειδή είναι $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$ θα έχουμε: $\left(1^{\frac{6}{5}}+1^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\alpha^6+\beta^6\right)^{\frac{1}{6}}\geq 1\cdot\alpha+1\cdot\beta\Leftrightarrow\left(2^5(\alpha^6+\beta^6)\right)^{\frac{1}{6}}\geq\alpha+\beta\Leftrightarrow$ $\left(2^5(\alpha^6+\beta^6)\right)\geq(\alpha+\beta)^6$. Η ισότητα ισχύει αν $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow$**α=β.**

ii. Αν α, β, x, y>0, να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)^2\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)\geq(x+y)^3$.

(Μπάμπης Στεργίου)

Λύση

Από την ανισότητα Hölder (τρίτη μορφή (α)) θα έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}\geq\alpha^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^3}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y^3}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\left[(\alpha+\beta)^2\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}\geq\alpha^{\frac{2}{3}}\frac{(x^3)^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{2}{3}}}+\beta^{\frac{2}{3}}\frac{(y^3)^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}}\Leftrightarrow$$

$(\alpha+\beta)^2\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)\geq(x+y)^3$. Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\alpha}{\frac{x^3}{\alpha^2}}=\frac{\beta}{\frac{y^3}{\beta^2}}\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{x^3}=\frac{\beta^3}{y^3}$

$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$

iii. Αν (α, β, γ), (κ, λ, μ) και (x, y, z) είναι τριάδες θετικών, να αποδείξετε ότι $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)(x^3+y^3+z^3)\geq(\alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu z)^3$. (Μπάμπης Στεργίου).

Λύση

Από την ανισότητα Hölder (πρώτη μορφή (β)) θα έχουμε:

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)^{\frac{1}{3}}(x^3+y^3+z^3)^{\frac{1}{3}}\geq\alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu z\Leftrightarrow$$

$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)(x^3+y^3+z^3)\geq(\alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu z)^3$. Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu}$ και $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$.

iv. Αν α, β, γ και x, y, z είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{z}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{3(x+y+z)}$. (Λευκορωσία 2000) (Μπ. Στεργίου)

Λύση

Από την ανισότητα Hölder θα έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{z}\right)^{\frac{1}{3}}(1+1+1)^{\frac{1}{3}}(x+y+z)^{\frac{1}{3}}\geq$$

$$\left(\frac{\alpha^3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot x^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{\beta^3}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot y^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{\gamma^3}{z}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot z^{\frac{1}{3}}=\alpha+\beta+\gamma.$$

Υψώνουμε στον κύβο και θα έχουμε:

$$3\left(\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{z}\right)(x+y+z)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^3\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{z}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{3(x+y+z)}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ και $\frac{1}{\frac{\alpha^3}{x}}=\frac{1}{\frac{\beta^3}{y}}=\frac{1}{\frac{\gamma^3}{z}}$ δηλαδή x=y=z και α=β=γ.

ν. Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: $3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2\geq(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3$. (Μπ. Στεργίου)

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα Hölder θα έχουμε:

$$(1^3+1^3+1^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}\geq 1\cdot\alpha\cdot\alpha+1\cdot\beta\cdot\beta+1+1\cdot\gamma\cdot\gamma$$

$$\Leftrightarrow\left[3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\right]^{\frac{1}{3}}\geq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2\geq(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3.$$

Είναι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1.$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν α=β=γ.

Ανισότητα Minkowsky

Η) Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\geq 0$ και $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu\geq 0$ τότε:

$$\left(\alpha_1^p+\alpha_2^p+\cdots+\alpha_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\beta_1^q+\beta_2^q+\cdots+\beta_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left((\alpha_1+\beta_1)^p+(\alpha_2+\beta_2)^p+\cdots+(\alpha_\nu+\beta_\nu)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ή $\left(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left(\sum_{i=1}^{\nu}(\alpha_i+\beta_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Η ισότητα ισχύει αν $\beta_i=\lambda\alpha_i$, δηλαδή αν οι β_i, α_i είναι ανάλογοι.

Ανισότητα Tschebychev

Θ) Έστω (α, β, γ) και (x, y, z) δύο τριάδες πραγματικών αριθμών.

- Αν (α≤β≤γ και x≤y≤z) ή (α≥β≥γ και x≥y≥z), δηλαδή οι τριάδες (α, β, γ) και (x, y, z) έχουν την ίδια διάταξη, τότε: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{3}$.

Η ισότητα ισχύει αν α=β=γ ή x=y=z.

Γενίκευση

$\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_\nu$ και $\beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_\nu$ ή $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_\nu$ και $\beta_1\geq\beta_2\geq\cdots\geq\beta_\nu$

τότε: $\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_\nu\beta_\nu}{\nu}\geq\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu}{\nu}$ ή

$\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\beta_i\geq\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\right)\cdot\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i\right)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\nu$ ή $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_\nu$. (Μπ. Στεργίου)

Παραδείγματα

i. Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}$.

(Ανισότητα του Nesbitt) (Μπ. Στεργίου)

Απόδειξη

Λόγω συμμετρίας θεωρούμε α≥β≥γ. Τότε θα είναι $\frac{1}{\beta+\gamma}\geq\frac{1}{\gamma+\alpha}\geq\frac{1}{\alpha+\beta}$.

Από την ανισότητα Tschebychev θα έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}}{3}\leq\frac{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right)\ (1).$$

Είναι $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right)=$

$\frac{1}{6}(2\alpha+2\beta+2\gamma)\cdot\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right)=$

$\frac{1}{6}[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)]\cdot\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right)\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ (2) (*).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

(*) Κάναμε χρήσει της βασικής ανισότητας $(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$.

ii. Αν α, β, γ∈R+ να δείξετε ότι $\frac{\alpha^8+\beta^8+\gamma^8}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$.

Basics of Olympiad Inequalities Samin Riasat

Λύση

Από την ανισότητα Chebychev θα έχουμε:

$3(\alpha^8+\beta^8+\gamma^8)\geq(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ (1).

Από την ανισότητα (Α-Γ-Α) θα είναι $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6\geq 3\sqrt[3]{\alpha^6\beta^6\gamma^6}=3\alpha^2\beta^2\gamma^2$ (2).

Η (1) λόγω της (2) γίνεται $3(\alpha^8+\beta^8+\gamma^8)\geq 3\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\Leftrightarrow$

$(\alpha^8+\beta^8+\gamma^8)\geq\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ (3).

Είναι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, οπότε η (3) γίνεται:

$$(\alpha^8+\beta^8+\gamma^8)\geq\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\Leftrightarrow\frac{\alpha^8+\beta^8+\gamma^8}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}\geq\frac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^8+\beta^8+\gamma^8}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

iii. Αν x, y, z>0, να αποδείξετε ότι $3(x^3+y^3+z^3)\geq(x+y+z)(xy+yz+zx)$ (Μπ. Στεργίου)

Λύση

Επειδή $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ και οι τριάδες (x, y, z) και (x^2, y^2, z^2) έχουν την ίδια διάταξη, από την ανισότητα Tschebychev παίρνουμε:

$$\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{xy+yz+zx}{3}\leq\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\leq\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\Rightarrow$$

$3(x^3+y^3+z^3)\geq(x+y+z)(xy+yz+zx)$. Η ισότητα ισχύει μόνο για x=y=z.

Ανισότητες Weierstrass.

I) ***α)*** Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\geq 0$ τότε:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu)\geq 1+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)$$

β) Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\geq 0$ και μικρότεροι του 1, τότε:

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_\nu)\geq 1-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu).$$

Ανισότητα Schur

Κ) Η ανισότητα **Schur** αφορά μια ομάδα ανισοτήτων με πολλές εφαρμογές.
Αν α, β, γ≥0, τότε:

- $\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\geq 0$ (Μορφή α)
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma\geq\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$ (Μορφή β)
- $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\geq\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)+\gamma\alpha(\gamma^2+\alpha^2)$ (Μορφή γ)
- $\alpha^\nu(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta^\nu(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\gamma^\nu(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\geq 0$ για κάθε $\nu\in N^*$ (Μορφή δ).

Η ισότητα ισχύει όταν:

- ✓ οι αριθμοί είναι ίσοι ή
- ✓ Δύο τουλάχιστον από τους α, β και γ είναι ίσοι και ο άλλος είναι ίσος με μηδέν.

Παραδείγματα

i. Αν α, β, γ≥0, να αποδείξετε ότι:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+5\alpha\beta\gamma\geq(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ (1). (Μπ. Στεργίου)

Απόδειξη

Είναι $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$, οπότε η (1) γίνεται: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma\geq\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$ η οποία ισχύει, αφού είναι η ανισότητα Schur.

Η ισότητα ισχύει αν: α=β=γ ή (α=β και γ=0) ή (β=γ και α=0) ή (γ=α και8 β=0)

ii. Αν α, β, γ≥0, να αποδείξετε ότι:

$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\beta+\gamma)^2}+\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}{(\gamma+\alpha)^2}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}\geq 0$. (Μπ. Στεργίου)

Απόδειξη

Επειδή η αποδεικτέα ανισότητα είναι συμμετρική, δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι α≥β≥γ, οπότε θα έχουμε:

$\frac{1}{(\beta+\gamma)^2}\geq\frac{1}{(\gamma+\alpha)^2}\geq\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}$.

Από την ανισότητα **Schur** (μορφή α)

Ανισότητα ACZEL

Λ) Αν $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2>0$ και $x^2-y^2-v^2>0$ τότε:

$(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)(x^2-y^2-v^2)\leq(\alpha x-\beta y-\gamma v)^2$.

Γενίκευση: Αν $\alpha_1^2-\alpha_2^2-\cdots-\alpha_\nu^2>0$ και $\beta_1^2-\beta_2^2-\cdots-\beta_\nu^2>0$, τότε
$\left(\alpha_1^2-\alpha_2^2-\cdots-\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2-\beta_2^2-\cdots-\beta_\nu^2\right)\leq\left(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\cdots-\alpha_2\beta_2\right)^2$.

Ανισότητα Bellman

Μ) Αν $\alpha^\nu-\beta^\nu-\gamma^\nu>0$ και $x^\nu-y^\nu-z^\nu>0$, όπου α, β, γ, x, y, z≥0, τότε:

$$(\alpha^\nu-\beta^\nu-\gamma^\nu)^{\frac{1}{\nu}}(x^\nu-y^\nu-z^\nu)\leq\left[(\alpha+x)^\nu-(\beta+y)^\nu-(\gamma+z)^\nu\right]^{\frac{1}{\nu}}.$$

Ανισότητα Bohr

Ν) Αν α, β∈R και γ>0, τότε: $(\alpha+\beta)^2\leq(1+\gamma)\alpha^2+\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\beta^2$.

Ανισότητα Αρχιμήδη

Ξ) Ισχύει ότι: $1^\mu+2^\mu+\cdots+(\nu-1)^\mu<\frac{\nu^{\mu+1}}{\mu+1}<1^\mu+2^\mu+\cdots+(\nu-1)^\mu+\nu^\mu$.

Ανισότητα Andrescu-Bergstrom

Ο) Αν $x_1,x_2,\cdots,x_\nu\in\mathbb{R}$ και $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu>0$ τότε ισχύει

- $\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}$.

  Η ισότητα ισχύει αν $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_\nu}{\alpha_\nu}$.

- $\frac{x_1^\mu}{\alpha_1}+\frac{x_2^\mu}{\alpha_2}+\cdots+\frac{x_\nu^\mu}{\alpha_\nu}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)^\mu}{\nu^{\mu-2}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)}$, όπου μ φυσικός με μ≥2.

  Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x_1=x_2=\cdots=x_\nu$ και $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\nu$.

  Παρατήρηση: Για ν=3 και μ=3 θα έχουμε: $\frac{x^3}{\alpha}+\frac{y^3}{\beta}+\frac{z^3}{\gamma}\geq\frac{(x+y+z)^3}{3(\alpha+\beta+\gamma)}$.

  Η ισότητα ισχύει για x=y=z και α=β=γ. Η ανισότητα αυτή είναι **βασική ανισότητα**

- $\frac{x_1^\mu}{\alpha_1^{\mu-1}}+\frac{x_2^\mu}{\alpha_2^{\mu-1}}+\cdots+\frac{x_\nu^\mu}{\alpha_\nu^{\mu-1}}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)^\mu}{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)^{\mu-1}}$, όπου μ φυσικός με μ≥2.

Η ισότητα ισχύει αν $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_\nu}{\alpha_\nu}$.

- $\frac{\alpha_1^\mu}{\beta_1^\rho}+\frac{\alpha_2^\mu}{\beta_2^\rho}+\cdots+\frac{\alpha_\nu^\mu}{\beta_\nu^\rho}\geq\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)^\mu}{\nu^{\mu-\rho-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^\rho}$, όπου μ≥1, 0≤ρ≤μ−1 και $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu>0$.

  Η ισότητα ισχύει αν $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\cdots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$. (Μπ. Στεργίου)

Παραδείγματα

i. Αν α, β, γ>0 και x, y, z∈R, τότε:

a. $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\geq\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$$

b. $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}.$$ (Μπ. Στεργίου)

Λύση

a. Στην ανισότητα Andrescu θέτουμε για μ=2, ν=2, $x_1=x$, $x_2=y$, $\alpha_1=\alpha$ και $\alpha_2=\beta$ και έχουμε το ζητούμενο.

b. Όμοια

Παρατήρηση: Η παραπάνω ανισότητα είναι εφαρμογή της ανισότητας C-S-B.

ii. Αν x, y, z>0 με xyz=1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$ (1). (Μπ. Στεργίου)

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα $\frac{x^3}{\alpha}+\frac{y^3}{\beta}+\frac{z^3}{\gamma}\geq\frac{(x+y+z)^3}{3\ (\alpha+\beta+\gamma)}$ θα έχουμε:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{3[(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)+(1+x)(1+y)]}=$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{3[3+2(x+y+z)+xy+yz+zx]}\ (2).$$

Από (1) και (2) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{(x+y+z)^3}{3+2(x+y+z)+xy+yz+zx}\geq\frac{9}{4}$$, αρκεί

$$4(x+y+z)^3 \geq 9[3+2(x+y+z)+xy+yz+zx]$$ (3).

Είναι:

- ✓ $(x+y+z)^3 \geq \left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^3 = 27$ η ισότητα ισχύει για x=y=z=1.
- ✓ $2(x+y+z)^3 = 2(x+y+z)^2(x+y+z) \geq 2\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2(x+y+z) = 18(x+y+z)$ η ισότητα ισχύει για x=y=z=1.
- ✓ $(x+y+z)^3 = (x+y+z)^2(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{xyz}(x+y+z)^2 = 3(x+y+z)^2 \geq$ $\geq 9(xy+yz+zx)$. Η ισότητα ισχύει για x=y=z=1.

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων θα έχουμε την (3).

iii. Αν α, β, γ>0 με $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{3}$ να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1} \geq \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (1).$$

Λύση

Στην ανισότητα Andrescu θέτουμε μ=1, ν=3, $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, $x_3=\gamma$, $\alpha_1=\alpha^2-\beta\gamma+1$, $\alpha_2=\beta^2-\gamma\alpha+1$, $\alpha_3=\gamma^2-\alpha\beta+1$ και θα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{3^{-1}[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{\frac{1}{3}[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{3}+3]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1} \geq \frac{3(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{8}{3})} \quad (2).$$

Από τις (1), (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$\frac{3(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{8}{3})} \geq \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$, αρκεί $3(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{8}{3}$,

αρκεί $3[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)] \geq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{8}{3}$, αρκεί

$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\frac{6}{3} \geq \frac{8}{3}$, αρκεί $2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq \frac{2}{3}$, αρκεί

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \frac{1}{3}$, αρκεί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, το οποίο ισχύει.

iv. Αν α, β, γ>0 και α+β+γ=1, να αποδειχθεί ότι:

$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1} \geq 1$. (Μπ, Στεργίου)

Λύση

Στην ανισότητα Andrescu θέτουμε μ=2, ν=3, x_1=α+β, x_2=β+γ, x_3=γ+α, $α_1$=γ+1, $α_2$=α+1, $α_3$=β+1 και θα έχουμε:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq\frac{[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)]^2}{(\gamma+1)+(\alpha+1)+\beta+1)}=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)+3}$$

$=\dfrac{4}{1+3}=1$. Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma+1}=\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+1}=\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta+1}$.

Από τη σχέση $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma+1}=\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+1}\Leftrightarrow(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+1)=0\Leftrightarrow\alpha=\gamma$, οπότε η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$.

v. Έστω α, β, γ>0 πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε αβ+βγ+γα=3. Να δείξετε ότι

$\dfrac{1}{2\alpha^3+1}+\dfrac{1}{2\beta^3+1}+\dfrac{1}{2\gamma^3+1}\geq 1$ (1) (Εικοσιδωδεκάεδρον)

Λύση

$$\frac{1}{2\alpha^3+1}+\frac{1}{2\beta^3+1}+\frac{1}{2\gamma^3+1}=\frac{\frac{1}{\alpha^2}}{2\alpha+\frac{1}{\alpha^2}}+\frac{\frac{1}{\beta^2}}{2\beta+\frac{1}{\beta^2}}+\frac{\frac{1}{\gamma^2}}{2\gamma+\frac{1}{\gamma^2}}\overset{\text{andrescu}}{\geq}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}\ (2).$$

Από (1) και (2) αρκεί $\dfrac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}\geq 1$, αρκεί

$\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$, αρκεί

$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}+2\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\right)\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$, αρκεί

$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma$, αρκεί $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma$, αρκεί $\alpha\beta\gamma\leq 1$.

Από την ανισότητα Α-Γ-Α θα έχουμε:

$$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\Leftrightarrow\frac{3}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\leq 1\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma\leq 1.$$

vi. Αν α, β, γ>0 και αβγ=1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\ge\frac{3}{2}.$$

(36η ΔΜΟ-1995)

Λύση

Είναι αβγ=1, οπότε θα έχουμε: $\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}$, όμοια θα είναι $\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}=\frac{(\gamma\alpha)^2}{\beta\gamma+\beta\alpha}$, $\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}=\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha+\gamma\beta}$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}+\frac{(\gamma\alpha)^2}{\beta\gamma+\beta\alpha}+\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha+\gamma\beta}\ge$$

$$\frac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$, με x=αβ, y=βγ, z=γα.

Είναι xyz=αβ·βγ·γα=$(\alpha\beta\gamma)^2$=1. Η ισότητα ισχύει όταν α=β=γ=1, αφού πρέπει x=y=z.

vii. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί και $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}=1$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}$. (Μπ. Στεργίου)

Λύση

Η ανισότητα Andrescu δίνει:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}\ge\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\ge\frac{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}}{2}=\frac{1}{2}(*).$$

Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$.

(*) Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\alpha+\beta+\gamma=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+(\sqrt{\gamma})^2\ge\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}$, αφού γενικά ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

Τριγωνική Ανισότητα

Π) Αν $\mathbf{x_1, x_2, \cdots, x_\nu \in R}$ και $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu > 0}$ τότε ισχύει

Παραδείγματα

i. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι:
$\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}\geq\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$.

(49^{ος} ΠΜΔ 11/11/1989) Β Λυκείου

Λύση

Είναι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\beta\cdot\frac{1}{2}\alpha+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$

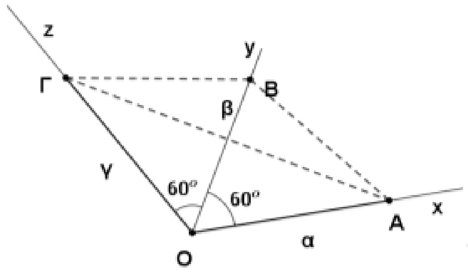
$\sqrt{\left(\beta-\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\frac{3}{4}\alpha^2}$. Όμοια $\sqrt{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}=\sqrt{\left(\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)^2+\frac{3}{4}\gamma^2}$ και

$\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\gamma\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)^2}$.

Θέτουμε $\mathbf{A}\left(\frac{1}{2}\alpha,\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$, $\mathbf{B}(\beta,0)$ και $\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma,\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)$ τότε η ανισότητα γίνεται (ΑΒ)+(ΒΓ)≥(ΑΓ) που ισχύει.

(2^{ος} τρόπος Τριγωνομετρικός) Περιοδικό Ευκλείδη Β τεύχος 2/1990

Θεωρούμε τις ημιευθείες Οx, Οy, Οz, ώστε $\mathbf{x\hat{O}y=z\hat{O}y=60^o}$ και πάνω σ΄αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΟΑ=α, Οβ=β, ΟΓ=γ. Από το τρίγωνο ΟΑΒ και τον νόμο των συνημιτόνων θα έχουμε:



$AB^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu60\Leftrightarrow$

$AB^2=\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\Leftrightarrow\mathbf{AB}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$.

Όμοια από το τρίγωνο ΟΒΓ θα έχουμε

$\mathbf{B\Gamma}=\sqrt{\gamma^2+\beta^2-\gamma\beta}$ και από το τρίγωνο ΟΑΓ θα είναι $\mathbf{A\Gamma}=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ θα έχουμε ΑΒ+ΒΓ>ΑΓ⇔ η αποδεικτέα.

Αν α,β,γ$\in\mathbf{R}_+^*$, τότε $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}+\sqrt{\gamma^2+\beta^2+\gamma\beta}>\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$.

Περιοδικό Ευκλείδη Β τεύχος 2/1990.

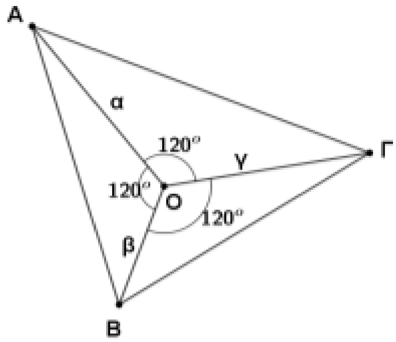
Λύση

Έστω τρείς ημιευθείες Οx, Οy, Οz στις οποίες θεωρούμε τα τμήματα ΟΑ=α, ΟΒ=β και ΟΓ=γ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ θα ισχύει ΑΒ+ΒΓ>ΑΓ.

Από το τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε λόγω του νόμου των συνημιτόνων

$AB^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu 120 \Leftrightarrow$

$AB^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta \Leftrightarrow \mathbf{AB}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$.



Όμοια από το τρίγωνο ΟΒΓ θα έχουμε

$\mathbf{B\Gamma}=\sqrt{\gamma^2+\beta^2+\gamma\beta}$ και από το τρίγωνο ΟΑΓ θα είναι $\mathbf{A\Gamma}=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$.

Άρα η σχέση ΑΒ+ΒΓ>ΑΓ$\Leftrightarrow$

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}+\sqrt{\gamma^2+\beta^2+\gamma\beta}>\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$.

Η Μέθοδος του τριωνύμου

Η μέθοδος αυτή αντιμετωπίζει μια ανισότητα μετατρέποντάς της σε τριώνυμο, κάνοντας χρήσει τις αντίστοιχες μεθόδους.

Παραδείγματα

i. Αν α, β∈R να δείξετε ότι $\boldsymbol{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 3(\alpha+\beta-1)}$ (1).

Λύση

Η (1)$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3\alpha-3\beta+3\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\beta-3)\alpha+\beta^2-3\beta+3\geq 0}$$\Leftrightarrow$**φ(α)≥0**,

όπου $\boldsymbol{\phi(\alpha)=\alpha^2+(\beta-3)\alpha+\beta^2-3\beta+3}$.

Είναι $\boldsymbol{\Delta=(\beta-3)^2-4(\beta^2-3\beta+3)=\beta^2-6\beta+9-4\beta^2+12\beta-12=-3\beta^2+6\beta-3=}$

$\boldsymbol{=-3(\beta^2-2\beta+1)=-3(\beta-1)^2\leq 0}$, άρα το **φ(α)≥0** για κάθε α∈R.

ii. Αν α, β, γ≥0 να αποδειχθεί ότι: $\boldsymbol{6\alpha+4\beta++5\gamma\geq 5\sqrt{\alpha\beta}+3\sqrt{\beta\gamma}+7\sqrt{\gamma\alpha}}$.

Λύση

Θέτουμε $\boldsymbol{\alpha=x^2,\beta=y^2,\gamma=z^2}$, όπου x, y, z≥0, οπότε θα έχουμε:

$\boldsymbol{6x^2+4y^2+5z^2\geq 5xy+3yz+7zx \Leftrightarrow 6x^2-(5y+7z)x+4y^2-3yz+5z^2\geq 0}$ (1).

Είναι $\boldsymbol{\Delta=(5y+7z)^2-4\cdot 6\cdot(4y^2-3yz+5z^2)}=$

$\boldsymbol{=25y^2+49z^2+70yz-96y^2+72yz-120z^2=-71y^2+142yz-71z^2}=$

$\boldsymbol{-71(y^2-2yz+z^2)=-71(y-z)^2\leq 0}$, άρα η (1) ισχύει για κάθε x∈R.

Η ισότητα ισχύει όταν Δ=0$\Leftrightarrow$y=z, οπότε θα έχουμε $\boldsymbol{6x^2-12yx+6y^2=0 \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{6(x^2-2yx+y^2)=0 \Leftrightarrow 6(x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z}$.

Γενικές Ασκήσεις

1) Αν x, y, z>0 και xyz=1, να αποδείξετε ότι:

$\mathbf{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})}$ (1).

Λύση

Η (1) γίνεται $\mathbf{(x^2+yz-2\sqrt{x})+(y^2+zx-2\sqrt{y})+(z^2+xy-2\sqrt{y}+)\geq 0 \overset{(Y)}{\Leftrightarrow}}$

$\mathbf{(x^2+\frac{1}{x}-2\sqrt{x})+(y^2+\frac{1}{y}-2\sqrt{y})+(z^2+\frac{1}{z}-2\sqrt{y})\geq 0 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(z-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq 0}$ που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν: $\mathbf{x-\frac{1}{\sqrt{x}}=0}$ και $\mathbf{y-\frac{1}{\sqrt{y}}=0}$ και $\mathbf{z-\frac{1}{\sqrt{z}}=0 \Leftrightarrow x=y=z=1}$.

2) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{(1-x^2+x^4)(1-y^2+y^4)(1-z^2+z^4)\geq x^2y^2z^2}$.

Λύση

Είναι $\mathbf{(1-x^2)^2\geq 0 \Leftrightarrow 1-2x^2+x^4\geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2+x^4\geq x^2}$.

Όμοια $\mathbf{(1-y^2)^2\geq 0 \Leftrightarrow 1-2y^2+y^4\geq 0 \Leftrightarrow 1-y^2+y^4\geq y^2}$ και

$\mathbf{(1-z^2)^2\geq 0 \Leftrightarrow 1-2z^2+z^4\geq 0 \Leftrightarrow 1-z^2+z^4\geq z^2}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε το ζητούμενο.

3) Δείξτε ότι: $\mathbf{\alpha^{2020}+\alpha^{2019}+\cdots+\alpha+1\geq 2021\alpha^{1010}, \alpha>0}$ (1).

Λύση

Η (1)$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\frac{\alpha^{2020}+\alpha^{2019}+\cdots+\alpha+1\geq}{\alpha^{1010}} 2021 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\alpha^{1010}+\alpha^{1009}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{1009}}+\frac{1}{\alpha^{1010}}\geq 2021}$.

Επειδή $\mathbf{\alpha^{1010}+\frac{1}{\alpha^{1010}}\geq 2}$, $\mathbf{\alpha^{1009}+\frac{1}{\alpha^{1009}}\geq 2 ..., \alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2}$ που είναι σε πλήθος 2010

θα έχουμε: $\mathbf{\alpha^{1010}+\alpha^{1009}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{1009}}+\frac{1}{\alpha^{1010}}\geq \underbrace{2+2+\cdots+2}_{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma 2010}+1=2021}$.

4) **i)** Αν α, β, γ>0, να δείξετε ότι $\mathbf{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}$

ii) Αν α, β, γ>0, να δείξετε ότι $\mathbf{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha\beta}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}$.

Λύση

i) Αρκεί $4\alpha\beta\gamma \le (\alpha^2+\beta\gamma)(\beta+\gamma)$ (1).

Είναι $\left[\alpha^2+(\sqrt{\beta\gamma})^2\right]\left[\sqrt{\beta}^2+\sqrt{\gamma}^2\right] \ge \left[\alpha\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta\gamma}\cdot\sqrt{\gamma}\right]^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha^2+\beta\gamma)(\beta+\gamma) \ge \alpha^2\beta+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma$ (2).

Λόγω των (1), (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\alpha^2\beta+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma \ge 4\alpha\beta\gamma$, αρκεί $\alpha^2\beta+\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma \ge 0$, αρκεί $\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma \ge 0$ που ισχύει.

ii) Είναι $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$, όμοια $\dfrac{\beta}{\beta^2+\gamma\alpha} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right)$και $\dfrac{\gamma}{\gamma^2+\alpha\beta} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

5) Αν α, β, γ, δ, $\varepsilon \in R$ με α+β+γ+δ+ε=5 και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2=25$ να βρεθεί το διάστημα που μεταβάλλεται το ε. (Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

Ζητάμε διάστημα μεταβολής του ε, δηλαδή κάποια ανισοτική σχέση, στην οποία να εμφανίζονται και τετράγωνα. Η ανισότητα (B-C-S) φαίνεται να μας βολεύει, αρκεί να απομονώσουμε το ε για το οποίο ζητάμε το διάστημα μεταβολής του.

Οι δοθείσες σχέσεις γίνονται: α+β+γ+δ=5−ε και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=25-\varepsilon^2$.

Από την ανισότητα (B-C-S) αν θέσουμε $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$ θα έχουμε:

$4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) \ge (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 \Leftrightarrow 4(25-\varepsilon^2) \ge (5-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow$

$100-4\varepsilon^2 \ge 25-10\varepsilon+\varepsilon^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2-2\varepsilon-15 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le \varepsilon \le 5$.

6) Όμοια αν α, β, γ, δ, $\varepsilon \in R$ με α+β+γ+δ+ε=6 και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2=8$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ε.

Λύση

$\dfrac{2}{5} \le \varepsilon \le 2$. Η μέγιστη τιμή του είναι το 2 που συμβαίνει για α=β=γ=δ=1.

7) Όμοια αν α, β, γ, δ, $\varepsilon \in R$ με α+β+γ+δ+ε=8 και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2=16$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ε.(7η Ολυμπιάδα ΗΠΑ 2-5-1978)

Λύση

$0 \le \varepsilon \le \dfrac{16}{5}$. Η μέγιστη τιμή του είναι το $\dfrac{16}{5}$ που συμβαίνει για α=β=γ=δ=$\dfrac{6}{5}$.

Σχόλιο: Με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή του α_ν, όπου $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=K$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_\nu^2=\Lambda$ και τα α_i είναι πραγματικοί αριθμοί. Για συμβατότητα, έπεται από την ανισότητα Cauchy ότι τα Κ και Λ πρέπει να ικανοποιούν την $\left(\frac{K}{\nu}\right)^2 \le \frac{\Lambda}{\nu}$. Αν έχουμε ισότητα, τότε όλα τα α_i πρέπει να είναι ίσα.

Αυτή η ειδική περίπτωση του προβλήματος έχει δοθεί πολλές φορές σε διάφορους διαγωνισμούς.

(Μαθηματικές Ολυμπιάδες των ΗΠΑ 1972-1986 Murray S. Klamkin)

8) Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$. (Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

Όμοια από την ανισότητα (B-C-S) θα έχουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2+\alpha^2) \ge (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \Leftrightarrow 1\cdot 1 \ge (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le 1.$$

Επειδή ζητείται να βρούμε την μέγιστη και τν ελάχιστη τιμή τας παράστασης $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, θα πρέπει να ελέγξουμε αν η μέγιστη τιμή είναι το 1 και η ελάχιστη το –1.

Η ισότητα για την ανισότητα (B-C-S) ισχύει όταν:

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}=0 \text{ και } \begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}=0 \text{ και } \begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \alpha\gamma-\beta^2=0 \text{ και } \alpha^2-\alpha\gamma=0 \text{ και } \alpha\beta-\gamma^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll}\alpha^2=\beta\gamma & \text{και}\\ \beta^2=\alpha\gamma & \text{και}\\ \gamma^2=\alpha\beta & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha^2-\beta^2=\gamma(\beta-\alpha)\\ \alpha^2-\gamma^2=\beta(\gamma-\alpha)\\ \beta^2-\gamma^2=\alpha(\gamma-\beta)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\gamma(\alpha-\beta)=0\\ (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)+\beta(\alpha-\gamma)=0\\ (\beta-\gamma)(\beta+\gamma)+\alpha(\beta-\gamma)=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)=0 & \text{και}\\ (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma+\beta)=0 & \text{και}\\ (\beta-\gamma)(\beta+\gamma+\alpha)=0 & \end{array}\right\}.$$

Αν α+β+γ=0 τότε θα έχουμε $\left.\begin{array}{r}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\\ (\alpha+\beta+\gamma)^2=0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{1}{2}$$ που είναι η ελάχιστη τιμή.

Αν α–β=0⇔α=β τότε:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha^2=\beta\gamma\\ \alpha=\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha^2-\alpha\gamma=0\\ \alpha=\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha(\alpha-\gamma)=0\\ \alpha=\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha=0 \text{ ή } \alpha-\gamma=0\\ \alpha=\beta\end{array}\right\}.$$

Αν α=0⇒β=0 και $\gamma^2=1 \Rightarrow \gamma=\pm 1$, άρα $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$.

Αν $\left.\begin{array}{r}\alpha-\gamma=0\\ \alpha=\beta\end{array}\right\}$ ⇒α=β=γ άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \Rightarrow 3\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε θα είναι $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, που είναι η μέγιστη τιμή.

9) Αν $\mathbf{x^2+y^2+z^2=4}$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\mathbf{\Pi=2x+y+2z}$. (Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

Θα δουλέψουμε με την ανισότητα (B-C-S).

Είναι $\mathbf{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2}$ και θέτοντας α=2, β=1 και γ=2 για να δημιουργήσουμε την παράσταση $\mathbf{\Pi=2x+y+2z}$, θα έχουμε:

$\mathbf{(2^2+1^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(2x+y+2z)^2\Leftrightarrow 9\cdot 4\geq(2x+y+2z)^2\Leftrightarrow}$

$\mathbf{|2x+y+2z|\leq 6\Leftrightarrow -6\leq 2x+y+2z\leq 6}$.

Το ίσον ισχύει όταν $\mathbf{\begin{vmatrix}2 & 1\\ x & y\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2y-x=0\Leftrightarrow 2y=x}$ και $\mathbf{\begin{vmatrix}2 & 2\\ x & z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2z-2x=0\Leftrightarrow}$

$\mathbf{z=x}$ και $\mathbf{\begin{vmatrix}1 & 2\\ y & z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow z-2y=0\Leftrightarrow 2y=z}$, άρα $\mathbf{x=z=2y}$.

Τότε θα είναι $\mathbf{x^2+y^2+z^2=4\Leftrightarrow 2x^2+y^2=4\Leftrightarrow 2\cdot 4y^2+y^2=4\Leftrightarrow y^2=\frac{4}{9}\Leftrightarrow}$

$\mathbf{y=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}}$.

Αν $\mathbf{y=\frac{2}{3}}$ τότε $\mathbf{x=z=2y=\frac{4}{3}}$, οπότε $\mathbf{\Pi=2x+y+2z=2\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+2\cdot\frac{4}{3}=\frac{18}{3}=6}$.

Αν $\mathbf{y=-\frac{2}{3}}$ τότε $\mathbf{x=z=2y=-\frac{4}{3}}$, οπότε $\mathbf{\Pi=-2\cdot\frac{4}{3}-\frac{2}{3}-2\cdot\frac{4}{3}=-\frac{18}{3}=-6}$.

10) Αν $\mathbf{x^2+2y^2+4z^2=28}$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\mathbf{\Pi=2x-4y+8z}$. Για ποιές τιμές του x συμβαίνει αυτό; (Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

Θα δουλέψουμε με την ανισότητα (B-C-S).

Είναι $\mathbf{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2}$ (1).

Είναι $\mathbf{x^2+2y^2+4z^2=28\Leftrightarrow x^2+(\sqrt{2}y)^2+(2z)^2=28}$ (2).

Για α=2, $\mathbf{\beta=-2\sqrt{2}}$ (πρέπει να είναι $\mathbf{-4y=\beta\sqrt{2}y\Rightarrow\beta=-2\sqrt{2}}$), γ=4 (πρέπει να είναι 8z=γ·2z⇒γ=4), όλα αυτά για να δημιουργήσουμε την παράσταση $\mathbf{\Pi=2x-4y+8z}$.

Η (1) $\mathbf{\Leftrightarrow\left(2^2+(-2\sqrt{2})^2+4^2\right)\left(x^2+(\sqrt{2}y)^2+(2z)^2\right)\geq(2x-4y+8z)^2\Leftrightarrow}$

$\mathbf{\left(4+8+16\right)\left(x^2+2y^2+4z^2\right)\geq(2x-4y+8z)^2\Leftrightarrow(2x-4y+8z)^2\leq 28\cdot 28\Leftrightarrow}$

$\mathbf{|2x-4y+8z|\leq 28\Leftrightarrow -28\leq 2x-4y+8z\leq 28}$.

Το ίσον ισχύει όταν $\mathbf{\begin{vmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ x & \sqrt{2}y\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}y+2\sqrt{2}x=0\Leftrightarrow x=-y}$ και

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x & 2z \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{4z - 4x = 0} \Leftrightarrow \mathbf{x = z}$ και $\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2}y & 2z \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{-4\sqrt{2}z - 4\sqrt{2}y = 0} \Leftrightarrow \mathbf{z = -y}$

άρα τελικά πρέπει $\mathbf{x = -y = z}$.

Τότε θα έχουμε $\mathbf{x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 28 \Leftrightarrow 7x^2 = 28 \Leftrightarrow x = \pm 2}$.

Για x=2 θα είναι y=–2 και $\mathbf{\Pi = 2x - 4y + 8z = 4 + 8 + 16 = 28}$.

Για x=–2 θα είναι y=2 και $\mathbf{\Pi = 2x - 4y + 8z = -4 - 8 - 16 = -28}$.

11) Αν $\boldsymbol{\alpha,\beta,,\gamma,\delta \in R_+^*}$ να δείξετε ότι

i. $\boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \geq 9\alpha\beta\gamma}$ (1)

ii. $\boldsymbol{\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma) \geq 6\alpha\beta\gamma}$ (2)

iii. $\boldsymbol{\dfrac{3}{\alpha+\beta+\gamma}+\dfrac{3}{\alpha+\beta+\delta}+\dfrac{3}{\alpha+\gamma+\delta}+\dfrac{3}{\beta+\gamma+\delta} \geq \dfrac{16}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}$ (3).

(Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

i. Επειδή αβγ≠0 η (1)⇔ $\boldsymbol{\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \geq 9 \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 3^2}$ το οποίο ισχύει.

ii. (1^{ος} τρόπος)

Διαιρούμε δια αβγ≠0 και η (2) γίνεται $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}+\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}+\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} \geq 6 \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha} \geq 6}$ (4).

Είναι $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\alpha} \geq 2}$, $\boldsymbol{\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\beta} \geq 2}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε την (4).

(2^{ος} τρόπος)

Διαιρούμε δια αβγ≠0 και η (2) γίνεται $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}+\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}+\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} \geq 6 \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}+1+\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}+1+\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+1 \geq 9 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\dfrac{\alpha+\gamma+\beta}{\beta}+\dfrac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha} \geq 9 \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 3^2}$ που ισχύει.

iii. Είναι

[(α+β+γ)+(α+β+δ)+(α+γ+δ)+(β+γ+δ)]·

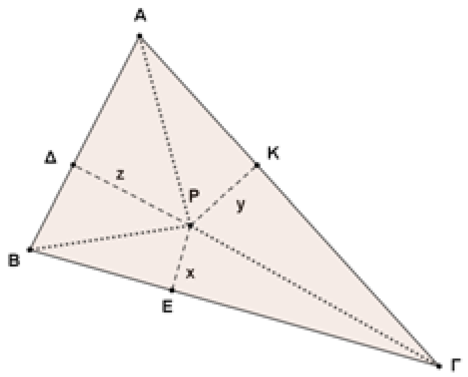
$\boldsymbol{\left[\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}+\dfrac{1}{\alpha+\beta+\delta}+\dfrac{1}{\alpha+\gamma+\delta}+\dfrac{1}{\beta+\gamma+\delta}\right] \geq 4^2 \Leftrightarrow}$

$$3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\left[\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{1}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{1}{\beta+\gamma+\delta}\right]\geq 4^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\left[\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{3}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{3}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{3}{\beta+\gamma+\delta}\right]\geq 16.$$

12) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ρ σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Αν x, y, z είναι οι αποστάσεις του Ρ από τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης $x^2+y^2+z^2$. (Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση



Ζητούμε το ελάχιστο ενός αθροίσματος τετραγώνων.

Θα δουλέψουμε με την ανισότητα (B-C-S).

Είναι (ΑΒΡ)+(ΑΓΡ)+(ΒΓΡ)=(ΑΒΓ)$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot z+\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot y+\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot x=(\mathrm{AB\Gamma})\Leftrightarrow$$

$\gamma\cdot z+\beta\cdot y+\alpha\cdot x=2E$ (1).

Επειδή οι πλευρές του τριγώνου είναι σταθερές άρα θα είναι σταθερό και το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=c^2$.

Από την ανισότητα (B-C-S) θα έχουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\Leftrightarrow$$

$$c^2(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}c^2(x^2+y^2+z^2)\geq(2E)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(2E)^2}{c^2}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+z^2$ είναι $\left(\frac{2E}{c}\right)^2$ και αυτό συμβαίνει όταν για το σημείο Ρ ισχύει:

$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\alpha y-\beta x=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$ και

$\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ x & z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\alpha z-\gamma x=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\gamma}{z}$ και

$\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ y & z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\beta z-\gamma y=0\Leftrightarrow\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$, δηλαδή όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$.

13) Αν α, β, γ είναι τα μέτρα πλευρών τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι

i. $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma$

ii. Αν ισχύει η ισότητα να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

(Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

Ι. Αρκεί $\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2\geq\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$.

Είναι $\left((\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+(\alpha\beta)^2\right)\left((\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\right)\geq\left(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma\right)^2\Leftrightarrow$

$\left((\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+(\alpha\beta)^2\right)^2\geq\left(\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right)^2\Leftrightarrow$

$(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+(\alpha\beta)^2\geq\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$.

ΙΙ. Η ισότητα ισχύει όταν $\begin{vmatrix}\beta\gamma & \gamma\alpha\\ \alpha\beta & \beta\gamma\end{vmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta\gamma=\mathbf{0}\Leftrightarrow\beta\gamma-\alpha^2=\mathbf{0}\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$

και $\begin{vmatrix}\beta\gamma & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \gamma\alpha\end{vmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\beta\gamma^2\alpha-\alpha^2\beta^2=\mathbf{0}\Leftrightarrow\gamma^2-\alpha\beta=\mathbf{0}\Leftrightarrow\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ και

$\begin{vmatrix}\gamma\alpha & \alpha\beta\\ \beta\gamma & \gamma\alpha\end{vmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\gamma^2\alpha^2-\alpha\gamma\beta^2=\mathbf{0}\Leftrightarrow\gamma\alpha-\beta^2=\mathbf{0}\Leftrightarrow\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}$, οπότε θα είναι

$\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\mathbf{1}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$.

14) Αν α, β, γ>0 να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}+\dfrac{6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\geq\mathbf{8}$.

(Crux 2002)

Λύση

Ισχύει $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\geq3\alpha\beta\gamma$ και επειδή αβγ>0 θα έχουμε $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}\geq\mathbf{3}$ (1).

Επίσης $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2\Rightarrow\dfrac{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\geq\mathbf{1}$ (2).

Λόγω των (1) και (2) θα έχουμε:

$\dfrac{2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}+\dfrac{6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+\gamma)}\geq\mathbf{2\cdot3+2\cdot1=8}$.

15) Αν δύο από τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ δεν είναι 0 να δείξετε ότι:

$\dfrac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}\geq\dfrac{3}{2}$. (Περιοδικό Ευκλείδης Β)

Λύση

Αρκεί $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}+1\right)+\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}+1\right)+\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}+1\right)\geq\frac{3}{2}+3$, αρκεί

$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\gamma^2+\alpha^2}\right)+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\geq\frac{9}{2}$, αρκεί

$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(\frac{1}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right)\geq 3^3$, αρκεί

$(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2)\left(\frac{1}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right)\geq 3^3$, αρκεί

$\left((\beta^2+\gamma^2)+(\gamma^2+\alpha^2)+(\alpha^2+\beta^2)\right)\left(\frac{1}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right)\geq 3^3$ το οποίο ισχύει.

16) Αν α, β, γ>0 και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1+\alpha\beta}+\frac{1}{1+\beta\gamma}+\frac{1}{1+\gamma\alpha}\geq\frac{3}{2}$.

(Belarus 1999)

Λύση

Είναι $\frac{1^2}{1+\alpha\beta}+\frac{1^2}{1+\beta\gamma}+\frac{1^2}{1+\gamma\alpha}\geq\frac{(1+1+1)^2}{3+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}=\frac{9}{3+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$ (1).

Είναι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\Leftrightarrow 3+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 3+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\Leftrightarrow$

$\frac{1}{3+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leq\frac{1}{3+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$ και επειδή $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$ θα είναι

$\frac{1}{3+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\geq\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{9}{3+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$, άρα η (1) γίνεται:

$\frac{1^2}{1+\alpha\beta}+\frac{1^2}{1+\beta\gamma}+\frac{1^2}{1+\gamma\alpha}\geq\frac{3}{2}$.

17) Αν α, β, γ>0, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta+2\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+2\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+2\beta}\geq 1$.

(Τσεχία-Σχοβακία 1999)

Λύση

Είναι $\frac{\alpha}{\beta+2\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+2\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+2\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha\beta+2\alpha\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta\gamma+2\alpha\beta}+\frac{\gamma^2}{\alpha\gamma+2\beta\gamma}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)}\geq 1$, αρκεί $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$,

αρκεί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$, αρκεί

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$ που ισχύει.

18) Αν α, β, γ>0 να αποδείξετε ότι: $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\geq\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\alpha}\right)$(1).

Λύση

Η (1)$\Leftrightarrow$ $\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\geq\left(\alpha\beta+1\right)\left(\beta\gamma+1\right)\left(\gamma\alpha+1\right)$ (Πολ/με επί αβγ>0) (2).

Είναι $\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)\geq\left(\alpha\beta+1\right)^2$, $\left(\beta^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\geq\left(\beta\gamma+1\right)^2$ και

$\left(\alpha^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\geq\left(\gamma\alpha+1\right)$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα έχουμε:

$\left[\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\right]^2\geq\left[\left(\alpha\beta+1\right)\left(\beta\gamma+1\right)\left(\gamma\alpha+1\right)\right]^2\Leftrightarrow$η (2).

19) Αν α, β, γ, δ>0 με αβγδ=1, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha^2+\beta^2+\delta^2}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{\alpha^2+\gamma^2+\delta^2}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{\beta+\gamma+\delta}\geq 4.$$

Λύση

Από την ταυτότητα $3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$ με x+y+z>0 θα έχουμε:

$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\geq\frac{x+y+z}{3}$, οπότε θα είναι

$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha+\beta+\gamma}\geq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, $\frac{\alpha^2+\beta^2+\delta^2}{\alpha+\beta+\delta}\geq\frac{\alpha+\beta+\delta}{3}$, $\frac{\alpha^2+\gamma^2+\delta^2}{\alpha+\gamma+\delta}\geq\frac{\alpha+\gamma+\delta}{3}$ και

$\frac{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{\beta+\gamma+\delta}\geq\frac{\beta+\gamma+\delta}{3}$ και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha^2+\beta^2+\delta^2}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{\alpha^2+\gamma^2+\delta^2}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{\beta+\gamma+\delta}\geq$$

$$\geq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\alpha+\beta+\delta}{3}+\frac{\alpha+\gamma+\delta}{3}+\frac{\beta+\gamma+\delta}{3}=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Είναι από την ανισότητα Α-Γ-Α $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\geq\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma+\delta\geq 4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}=4$

.

20) Αν α, β, γ≠0, να αποδείξετε ότι

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\geq(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$ (1).

Λύση

Η (1)$\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}+1\geq 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)+\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\geq\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right).$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\geq\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$, αρκεί $\alpha^4+\beta^4\geq\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$, αρκεί $\alpha^3(\alpha-\beta)-\beta^3(\alpha-\beta)\geq 0$, αρκεί $(\alpha-\beta)\left(\alpha^3-\beta^3\right)\geq 0$, αρκεί $(\alpha-\beta)^2\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)\geq 0$ που ισχύει.

Όμοια $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\geq\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$ και $\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\geq\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

21) Αν α, β, γ$\in$R* και α+β+γ=1, να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\geq 8$ (1).

(Περιοδικό Ευκλείδης Β τεύχος 3 1977) Ιαπωνία 1997

Λύση

Η (1) γίνεται $\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\geq 8$, αρκεί $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\geq 8\alpha\beta\gamma$, αρκεί $1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma\geq 8\alpha\beta\gamma$, αρκεί λόγω υπόθεσης, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\geq 9\alpha\beta\gamma$, αρκεί $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\geq 9$

Από την ανισότητα (B-C-S) είναι $\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\geq\nu^2$, για κάθε $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\in\mathbf{R}_+^*$. Άρα $(\gamma+\beta+\alpha)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\geq 3^2$ και επειδή α+β+γ=1 έχουμε το ζητούμενο.

22) Αν α, β, γ>0 να δείξετε ότι $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)\geq 9(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

APMO (Asian Pacific Math Olympiad) 2004

Λύση

Είναι $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)=\left[(\alpha^2+1)+1\right]\left[(b^2+1)+1\right]=$

$(\alpha^2+1)(b^2+1)+\alpha^2+1+\beta^2+1+1=(\alpha^2+1)(b^2+1)+\alpha^2+\beta^2+3$ (1).

Είναι $(\alpha^2+1)(b^2+1)=(\alpha^2+1)(1+b^2)\geq(\alpha+\beta)^2$ (2),

$\alpha^2+\beta^2\geq\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}$ (3).

Η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)\geq(\alpha+\beta)^2+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}+3=$

$=\frac{3(\alpha+\beta)^2+6}{2}=\frac{3[(\alpha+\beta)^2+2]}{2}\Leftrightarrow(\alpha^2+2)(\beta^2+2)\geq\frac{3[(\alpha+\beta)^2+2]}{2}$ (4).

Η (4) γίνεται $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)\geq\frac{3[(\alpha+\beta)^2+2]}{2}(\gamma^2+2)\Leftrightarrow$

$$(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)\geq\frac{3}{2}[(\alpha+\beta)^2+2](2+\gamma^2)=\frac{3}{2}[(\alpha+\beta)^2+\sqrt{2}^2](\sqrt{2}^2+\gamma^2)\geq$$

$$\frac{3}{2}\left((\alpha+\beta)\sqrt{2}+\gamma\sqrt{2}\right)^2=\frac{3}{2}\sqrt{2}^2\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2=3\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2\geq9\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right).$$

23) Αν α, β, γ>0 να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta^3}+\frac{\beta}{\gamma^3}+\frac{\gamma}{\alpha^3}\geq\frac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$.

Λύση

Από την ανισότητα Α-Γ-Α έχουμε $\frac{\alpha}{\beta^3}+\frac{\beta}{\gamma^3}+\frac{\gamma}{\alpha^3}\geq3\cdot\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}}=3\cdot\frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta\gamma}$ (1).

Επίσης είναι $3\cdot\frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{\alpha\beta\gamma}\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\geq\frac{3}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}=\frac{3}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}=$

$=\frac{9}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{9}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}\geq\frac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$, αρκεί

$(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$, αρκεί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ το οποίο ισχύει.

Βιβλιογραφία

1) Ολυμπιάδες Μαθηματικών, Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Α Λυκείου Μπάμπης Στεργίου

2) Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Χαράλαμπος Στεργίου- Σιλουανός Μπραζιτίκος

3) Διαδύκτιο Αλγεβρικές – Γεωμετρικές Ανισότητες. 2lyk-kardits.kar.sch.gr/wp-content/uploads/2012/10/anisotitesolympiadskot.pdf

4) Basics of Olympiad Inequalities Samin Riasat

5) Μαθηματικά για διαγωνισμούς (Σωτήρης Λουρίδας, Κώστς Σάλαρης, Ανδρέας Τριανταφύλλου)

6) Εικοσιδωδεκάεδρον τεύχος 16, Δεκέμβριος 2016.

7) (Μαθηματικές Ολυμπιάδες των ΗΠΑ 1972-1986 Murray S. Klamkin)