Προετοιμασία για τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς

Πάτρα 2020

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα(1): Αν a και b θετικοί αριθμοί ώστε να ισχύει ότι:

$$a^2 + b^2 = 3 \cdot a \cdot b \quad , \quad a + b = 5$$

Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\frac{8}{17} \cdot \left(\frac{1}{a^9} + \frac{1}{b^9}\right)$$

Πρόβλημα(2): Οι ακέραιοι αριθμοί a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$a^2 - b^2 - 4 \cdot a - 2 \cdot b = 4$$

Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη των a, b.

Πρόβλημα(3): Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc} = (a + b + c)^3 + a + b + c$$

Πρόβλημα(4): Να δείξετε πως αν σε ένα τετράγωνο 3×3 επιλέξουμε τυχαία 10 σημεία, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο από αυτά που έχουν απόσταση γνήσια μικρότερη του $\frac{3}{2}$.

Πρόβλημα(5): Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους ισχύει:

$$n^2 = a + b \quad \text{και} \quad n^3 = a^2 + b^2$$

, για κάποιους με $a, b \in \mathbb{Z}$.

Πρόβλημα(6): Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 5} - \sqrt{2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 4} = x - 1$$

Β′ Λυκείου

Πρόβλημα(1): Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3 + y^3 - x^2 = y^2 - x \cdot y \quad , \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$$

Πρόβλημα(2): Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών η εξίσωση:

$$26 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0$$

Πρόβλημα(3): Να δείξετε ότι αν μεταξύ των ακεραίων $1, 2, 3, ..., 2019, 2020$ επιλέξουμε 1011 διαφορετικούς ακεραίους, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο από αυτούς που ο ένας να διαιρεί τον άλλο.

Πρόβλημα(4): Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$$

Να δείξετε ότι:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leqslant 8$$

Πρόβλημα(5): Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση:

$$x^3 \cdot (x+1) = 2 \cdot (x+a) \cdot (x + 2 \cdot a)$$

, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $a \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

Πρόβλημα(6): Βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η εξίσωση:

$$(x-1)^2 = |x - a|$$

, να έχει ακριβώς 3 πραγματικές λύσεις.

Γ′ Λυκείου

Πρόβλημα(1): Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής $A = \overline{xxxxabc} = x \cdot 10^6 + x \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, όπου a, b, c, x διαφορετικά από το μηδέν ψηφία, διαιρούνται με το 11.

Πρόβλημα(2): Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι που γράφονται σαν άθροισμα 4 τετραγώνων θετικών ακεραίων κατά τουλάχιστον δύο τρόπους.

Πρόβλημα(3): Να δείξετε ότι:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2019}} + \frac{1}{\sqrt{2020}} < 90$$

Πρόβλημα(4): Δίνεται το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του. Αν ΑΜ$\perp$ΖΕ και ΓΝ$\perp$ΔΕ να αποδείξετε ότι:
1. Τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι του τριγώνου ΔΕΖ.
2. ΖΜ = ΔΝ.

Πρόβλημα(5): Δίνονται επτά διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί μεταξύ τους, με άθροισμα 100. Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να βρούμε τρεις από αυτούς τους επτά θετικούς αριθμούς οι οποίοι να έχουν άθροισμα τουλάχιστον 50.

Πρόβλημα(6): Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε το γινόμενο $\big(15 \cdot a + b\big) \cdot \big(a + 15 \cdot b\big)$ να είναι δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη ακέραιο.

Πρόβλημα(7): Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ώστε να ισχύει ότι: η γωνία $\angle$ΒΑΓ $= 20^o$, $\angle$ΑΓΒ $= 80^o$ και επιπλέον υπάρχει σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ. Να βρεθεί η γωνία $\angle$ΒΔΓ.