ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Αχαΐας

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ»

Γ ΄ Γυμνασίου

Θέμα Α

1) Να υπολογιστούν τα α, β, όπου

$$\alpha = \frac{15\cdot(-15)^{2^3}\cdot 16^{-2}}{30^9\cdot\left(8^{-2}\right)^3}, \quad \beta = \frac{36^4}{18^3} : 72 - \left\{16^{-100}\cdot 32^{80} - \left[(-2)^3 - (-3^2)\right]^{1821}\right\}$$

2) Αν α=2 και β=2^2 να βρείτε την παράσταση

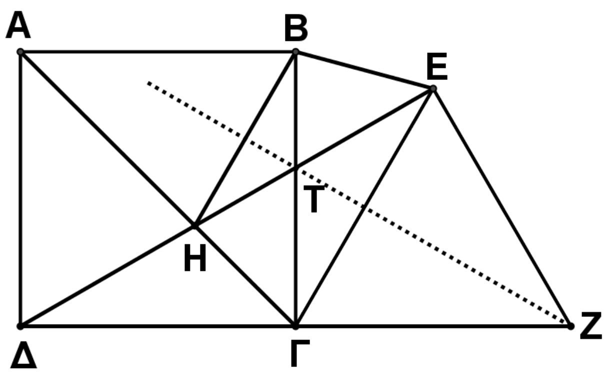
$$A = \left\{2\alpha\cdot\beta - \left[(-2\alpha)^3 - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cdot\left|-1940\right|\right] : 32\right\} : \alpha + 2011$$

Θέμα Β

Για τους θετικούς ακεραίους αριθμούς α, β ισχύει: **αβ+5α–3β–26=0.**Να υπολογίσετε τους **α, β**.

Θέμα Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΔΓ προς το Γ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ=ΔΓ. Με πλευρά την ΓΖ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΓΖΕ, στο ίδιο ημιεπίπεδο που είναι το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Η ΔΕ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Η και Τ αντίστοιχα.



(Σχ. 1)

i. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΒΕΓ και του τριγώνου ΕΗΓ

ii. Να αποδείξετε ότι ΗΒ//ΓΕ

iii. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Ζ προς την ΓΕ, διέρχεται από το Τ και από το μέσο της ΗΒ.

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

1) $$\alpha=\frac{15\cdot(-15)^8\cdot16^{-2}}{30^9\cdot8^{-6}}=\frac{15\cdot(15)^8\cdot16^{-2}}{30^9\cdot8^{-6}}=\frac{15^9\cdot(2\cdot8)^{-2}}{30^9\cdot8^{-6}}=\left(\frac{15}{30}\right)^9\frac{2^{-2}\cdot8^{-2}}{8^{-6}}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(2^{-2}\right)\cdot(8)^{-2-(-6)}=\ 2^{-9}\cdot\left(2^{-2}\right)\cdot\left(2^3\right)^4=2^{-11}\cdot2^{12}=2$$

$$\beta=\frac{36\cdot36^3}{18^3}\cdot\frac{1}{72}-\left\{(2^4)^{-100}\cdot(2^5)^{80}-[-8+9]^{1821}\right\}=$$

$$=\left(\frac{36}{18}\right)^3\cdot\frac{36}{72}-\left\{2^{-400}\cdot2^{400}-1^{1821}\right\}=$$

$$=(2)^3\cdot\frac{1}{2}-\left\{2^0-1\right\}==2^2-\{1-1\}=2^2$$

2) $$A=\left\{2\cdot2\cdot2^2-\left[-2^3\cdot2^3-\left(2-\frac{4}{2}\right)\cdot|-1940|\right]:32\right\}:2+2011=$$

$$=\left\{2^4-\left[-2^6-(2-2)\cdot|-1940|\right]:2^5\right\}:2+2011=$$

$$=\left\{2^4-\left[-2^6\right]:2^5\right\}:2+2011=\left\{2^4-\left[-2^{6-5}\right]\right\}:2+2011=\left\{2^4+2\right\}:2+2011=\mathbf{2020.}$$

Θέμα Β

Είναι αβ+5α–3β–26=0⇔ αβ–3β+5α –26=0⇔ β(α–3)+5α –15–11=0⇔ β(α–3)+5(α –3)=11⇔(α–3)(β+5)=11.

Είναι 11=1·11, άρα θα πρέπει

α–3=11 και β+5=1 οπότε θα έχουμε α=14 και β=–4, απορρίπτεται ή

α–3=1 και β+5=11 οπότε θα έχουμε α=4 και β=6, που είναι δεκτή ή

α–3=–11 και β+5=–1 οπότε θα έχουμε α=–8 και β=–6, απορρίπτεται ή

α–3=–1 και β+5=–11 οπότε θα έχουμε α=2 και β=–16, απορρίπτεται.

Άρα τελικά θα πρέπει να είναι α=4 και β=6

Θέμα Γ

I. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές (ΓΕ=ΓΖ=ΕΖ=ΓΒ) και

$\mathbf{E\hat{\Gamma}B}=180^o-90^o-60^o=30^o$, άρα

$$\mathbf{\Gamma\hat{E}B}=\mathbf{\Gamma\hat{B}E}=\frac{180^o-30}{2}=75^o$$

.

Για το τρίγωνο ΕΗΓ.

Είναι $\hat{H\Gamma E} = \hat{A\Gamma B} + \hat{B\Gamma E} = 45^o + 30^o = 75^o$, αρκεί να βρούμε άλλη μία γωνία του.

Το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ισοσκελές (ΓΕ=ΓΔ) και είναι $\hat{\Delta\Gamma E} = 90^o + 30^o = 120^o$

άρα $\hat{\Delta E\Gamma} = \hat{E\Delta\Gamma} = \dfrac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$.

Στο τρίγωνο ΕΗΓ είναι $\hat{H\Gamma E} = 75^o$, $\hat{\Delta E\Gamma} = 30^o$, άρα $\hat{\Gamma H E} = 75^o$, οπότε το τρίγωνο ΕΗΓ είναι ισοσκελές (ΕΗ=ΕΓ)

ΙΙ. Το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές (ΓΒ=ΓΕ) και το τρίγωνο ΕΗΓ είναι ισοσκελές (ΕΗ=ΕΓ), άρα ΓΕ=ΓΒ=ΗΕ (1)

Το τρίγωνο ΤΓΕ είναι ισοσκελές διότι $\hat{TE\Gamma} = \hat{T\Gamma E} = 30^o$, άρα ΤΓ=ΤΕ (2).
Από τις (1), (2) θα είναι ΒΓ−-ΤΓ=ΗΕ−ΤΕ⇒ΒΤ=ΗΤ, άρα το τρίγωνο ΤΒΗ είναι ισοσκελές.

Είναι $\hat{\Gamma TE} = 180^o - 30^o - 30^o = 120^o = \hat{BTH}$, ως κατά κορυφή, οπότε $\hat{TBH} = \hat{BHT} = 30^o$, άρα ΗΒ//ΓΕ

ΙΙΙ. Επειδή το τρίγωνο ΕΓΖ είναι ισόπλευρο, το ύψος από το Ζ θα είναι μεσοκάθετος της ΓΕ. Επειδή ΤΕ=ΤΓ, το Τ βρίσκεται στη μεσοκάθετη της ΓΕ, δηλαδή το ύψος από το Ζ διέρχεται από το Τ. Όμοια επειδή ΤΒ=ΤΗ η ΖΤ θα διέρχεται και από το μέσο της ΗΒ.