Αγαπητοί μαθητές

Η πανδημία covid-19 ματαίωσε κάθε προγραμματισμό που είχε κάνει το Παράρτημα Αχαΐας της ΕΜΕ για τον διαγωνισμό "Ο ΘΑΛΗΣ" 2020. Έτσι φέτος δεν μπορέσαμε να σας βοηθήσουμε με την διδασκαλία των μαθημάτων προετοιμασίας, όπως κάναμε τα προηγούμενα χρόνια.

Επειδή ο διαγωνισμός θα πραγματοποιηθεί, ετοιμάσαμε μια πρόταση προετοιμασίας των μαθητών, για τον παραπάνω διαγωνισμό, στο πλαίσιο των θεμάτων των προηγούμενων ετών.

Η παρακάτω πρόταση επισημαίνει βασικά θέματα θεωρίας και ένα σύνολο ασκήσεων προετοιμασίας.

Η Θεωρία και οι ασκήσεις είναι από τα βιβλία προετοιμασίας, για τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ, που έχει εκπονήσει το Παράρτημα.

Πρόκειται για τα τρία βιβλία:

1) ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Τεύχος για Β΄ Γυμνασίου
2) ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Τεύχος για Γ΄ Γυμνασίου
3) ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Πιθανότητες, Συνδυαστική, Παίγνια.

Για την Τάξη Β' χρησιμοποιήσαμε από τα παραπάνω βιβλία το 1 και το 3.

Να επισημάνουμε ότι τα παραπάνω βιβλία έχουν όλα τα θέματα της ΕΜΕ για όλους τους διαγωνισμούς του Γυμνασίου (ΘΑΛΗΣ, ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ, ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΌΣ) από το 1985 μέχρι το 2018.

Όλα τα θέματα είναι λυμένα και επί πλέον υπάρχουν και άλλα θέματα από αντίστοιχους διαγωνισμούς άλλων χωρών καθώς και θέματα από τις εκδόσεις της ΕΜΕ.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει και η αντίστοιχη θεωρία που κρίθηκε αναγκαία για τη λύση των παραπάνω θεμάτων.

Τα παραπάνω βιβλία μπορείτε να τα βρείτε στα γραφεία του Παραρτήματος Αχαΐας Καποδιστρίου 52, τηλ. 2610422273, 6987017155.

Το κόστος κάθε βιβλίου είναι 12 €.

Τα γραφεία του Παραρτήματος είναι ανοικτά:

Δευτέρα 20.00-22.00, Τετάρτη 19.00-21.00 και Πέμπτη 19.00-21.00.

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

- Το γινόμενο $\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}^{\nu\ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$ (είτε ο α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός) συμβολίζεται α^ν και λέγεται δύναμη με βάση το α και εκθέτη το φυσικό ν>1.

  $\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}^{\nu\ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}=\alpha^\nu$

- ορίζουμε $\boldsymbol{\alpha^1=\alpha}$ και $\boldsymbol{\alpha^0=1}$ **με** $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$

- Η δύναμη με εκθέτη αρνητικό ακέραιο ορίζεται: $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu}$

- Ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο

  - $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$
  - $\alpha^\mu:\alpha^\nu=\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$
  - $(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$
  - $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
  - $(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\nu\cdot\mu}$
  - $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

  όπου α, β≠0 (ή αβ≠0) και μ, ν φυσικοί αριθμοί.

- **Παρατήρηση:** Είναι φανερό ότι αν **α=β**, τότε **$\alpha^\nu=\beta^\nu$**, **δεν ισχύει το αντίστροφο,** για παράδειγμα είναι $(-3)^2=3^2$, όμως $-3\neq 3$.

Προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω, απαλείφουμε τις παρενθέσεις και εκτελούμε τις πράξεις.

Ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί ότι για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού ν, ο αριθμός:

$\mathbf{A}=\dfrac{36^\nu\cdot 5^{\nu+1}\cdot 7-2^{2\nu+1}\cdot 3^{2\nu+1}\cdot 5^\nu}{6^\nu\cdot 5^{\nu-1}\cdot 19+2^{\nu+1}\cdot 15^\nu}$ είναι πάντα φυσικός.

Βρίσκεται στη σελίδα 57 του βιβλίου 1

2) Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός **n**, για τον οποίο ισχύει ότι: $2^{2002} - 3(-4)^{1001} = 2^{n}$

Βρίσκεται στη σελίδα 57 του βιβλίου 1

3) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

I. $\alpha = 2^{300}$ και $\beta = 3^{200}$

II. $\alpha = 31^{11}$ και $\beta = 17^{14}$.

Βρίσκεται στη σελίδα 59 του βιβλίου 1

4) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 .$$

(Θαλής 1/11/2008)

5) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}$$

(Θαλής 12/11/2016)

6) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right) \cdot (-2)^2 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} .$$

(Θαλής 11/11/17)

7) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10\right) \cdot \left(\frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22\right)$$

(Θαλής 10/11/2018)

8) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

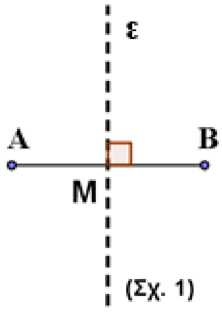
$$A = \left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5} + \frac{(-12)^5}{6^5} + 1\right) \cdot \left(\frac{(-16)^3}{8^3} + \frac{(-12)^3}{(-6)^3} + 2019\right).$$

(Θαλής 9/11/2019)

Η μεσοκάθετος

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

- Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (Σχ . 1).

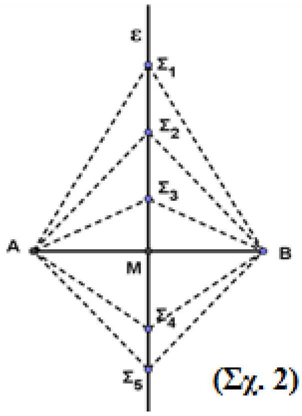


(Σχ. 1)

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του (Σχ. 2).

- **Αντίστροφα:** Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετο** του τμήματος.
  Ξέρουμε ότι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται **γεωμετρικός τόπος**.

  Έτσι η ευθεία ε είναι ο γεωμετρικός τόπος (το σύνολο των σημείων Σ) του επιπέδου για τα οποία, ισχύει ΣΑ=ΣΒ. Στο (Σχ. 2) θα έχουμε $Σ_1Α=Σ_1Β$, $Σ_2Α=Σ_2Β$,..., $Σ_5Α=Σ_5Β$. Αντίστροφο αν για κάποιο σημείο Σ ισχύει ΣΑ=ΣΒ τότε το Σ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

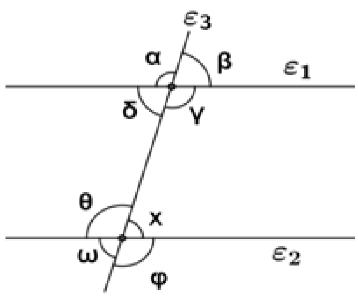


(Σχ. 2)

Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

Αν οι ευθείες **ε1** και **ε2** είναι παράλληλες και τέμνονται από την ευθεία $ε_3$, θα ισχύει:



- Οι **εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\gamma}=\hat{\theta}$ και $\hat{\delta}=\hat{x}$.
- Οι **εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\alpha}=\hat{\theta}$, $\hat{\beta}=\hat{x}$, $\hat{\gamma}=\hat{\phi}$ και $\hat{\delta}=\hat{\omega}$.
- Οι **εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\gamma}+\hat{x}=180^o$ και $\hat{\delta}+\hat{\theta}=180^o$.
- Οι **εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές**.

Δηλαδή είναι: $\hat{\varphi}+\hat{\beta}=180^{o}$ και $\hat{\alpha}+\hat{\omega}=180^{o}$.

- Οι **εντός εκτός εναλλάξ είναι παραπληρωματικές**.

  Δηλαδή είναι: $\hat{\theta}+\hat{\beta}=180^{o}$ και $\hat{\alpha}+\hat{x}=180^{o}$.

Παρατηρήσεις:

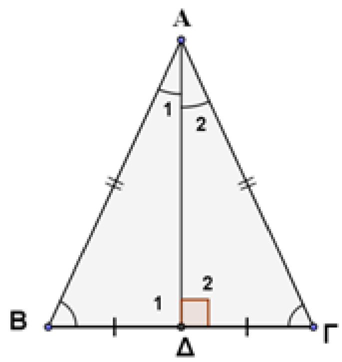
- Οι οξείες γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες
- Οι αμβλείες γωνίες είναι κι αυτές μεταξύ τους ίσες.

Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου - Άθροισμα γωνιών τριγώνου

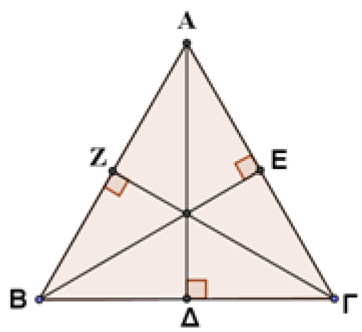
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:

- Η ευθεία της **διαμέσου**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **άξονας συμμετρίας** του **ισοσκελούς** τριγώνου.
- Η **διάμεσος**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **ύψος** και **διχοτόμος**.
- Οι **προσκείμενες γωνίες** στη βάση του ισοσκελούς είναι **ίσες**.



Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

- Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους.

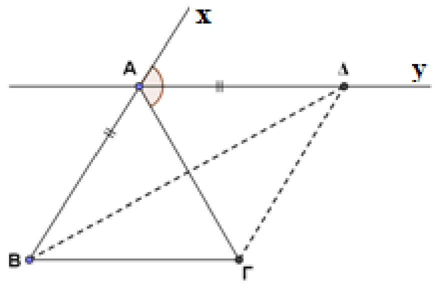


Παρατήρηση: Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή το ισοσκελές δεν είναι πάντα ισόπλευρο.

Θεώρημα: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^{o}$.

Ασκήσεις

1) Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Αy είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma A x}$. Δίνεται ακόμη ότι $\widehat{BA\Gamma} = 62^o$ και ΑΒ=ΑΔ.



I. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

II. Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$. (Θαλής 01/11/2008)

2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ, ενώ η παράλληλη από το Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $\widehat{I\Delta\Gamma} = 70^o$ και $\widehat{IE\Gamma} = 130^o$, να βρεθούν:

I. Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

II. Οι γωνίες $\widehat{BI\Delta}$ και $\widehat{EI\Gamma}$. (Θαλής 30/10/2010)

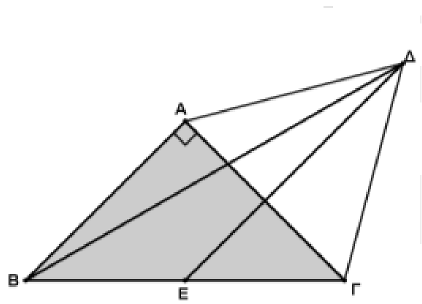
3) Στο παρακάτω σχήμα (Σχ. 1) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A} = 90^o$ και ΑΒ=ΑΓ.

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

I. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

II. Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{B\Delta E}$.

(Θαλής 01/11/2014)

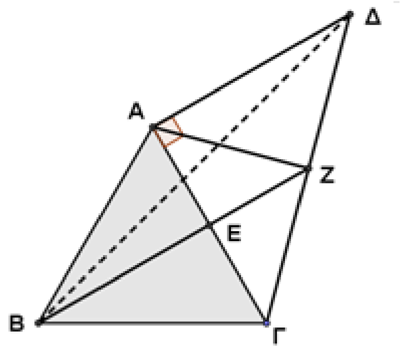


(Σχ. 1)

4) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ=α κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

I. Να αποδείξετε ότι ΖΑ=ΖΓ.

II. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{A\Delta B}$.



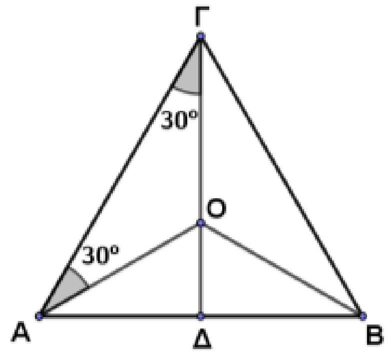
(Θαλής12/11/2016)

5) Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

Ι. Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.

ΙΙ. Αν $\mathbf{O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = 30^o}$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{B\hat{A}\Gamma}$.

(Θαλής 11/11/17)



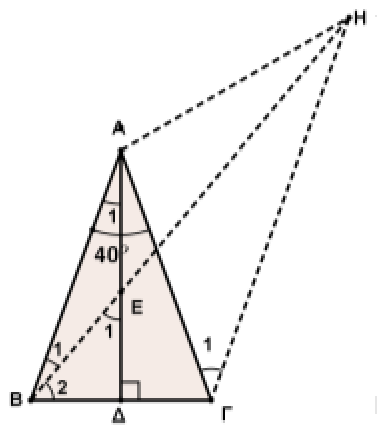
6) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) με $\mathbf{\hat{A} = 40^o}$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{\hat{A}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ=ΕΒ και ΑΒ=ΑΗ.
Να αποδείξετε ότι:

Ι. $\mathbf{A\hat{H}B = 20^o}$

ΙΙ. $\mathbf{A\hat{\Gamma}H = 40^o}$

ΙΙΙ. Η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\hat{H}\Gamma}$.

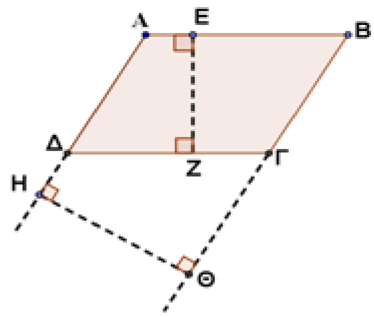
(Θαλής 10/11/2018)



(Σχ. 2)

Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Ρόμβος - Τετράγωνο - Τραπέζιο - Ισοσκελές τραπέζιο

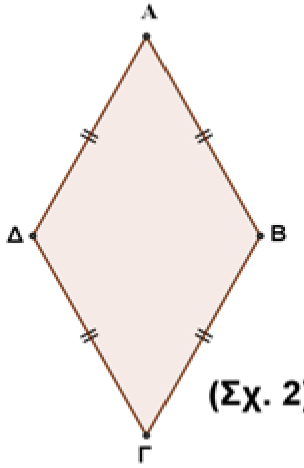
- **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή **ΑΒ//ΓΔ** και **ΑΔ//ΒΓ**.
- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του παραλληλογράμμου.
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.
- Για τις βάσεις **ΑΒ** και **ΓΔ** ύψος είναι το **ΕΖ**, ενώ για τις βάσεις **ΑΔ** και **ΒΓ** ύψος είναι το **ΗΘ.**



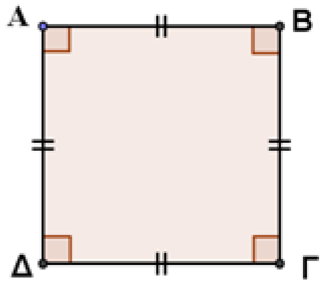
Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων

- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλά **ορθογώνιο** (Σχ. 1).
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **ρόμβος** (Σχ. 2).
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **τετράγωνο** (Σχ. 3).

(Σχ. 1)



(Σχ. 2)



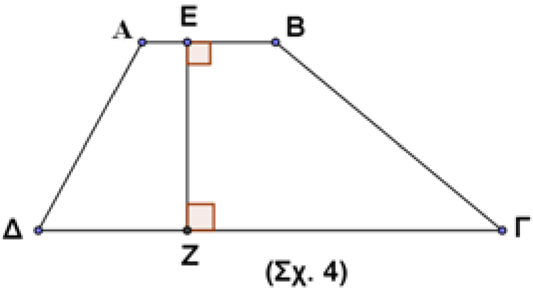
(Σχ. 3)

Τραπέζιο

- Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο** (Σχ. 4).

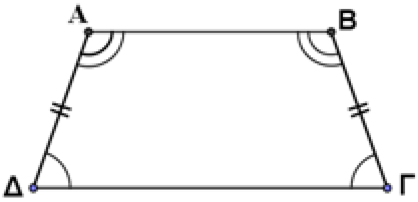
Οι παράλληλες πλευρές **ΑΒ, ΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου. Η ΑΒ είναι η μικρή βάση και η ΓΔ η μεγάλη.

Η απόσταση των βάσεων, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.



(Σχ. 4)

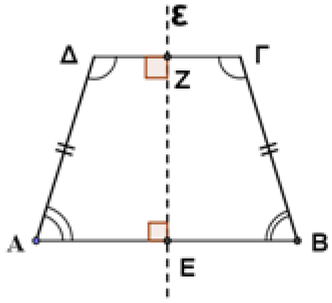
- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του **ίσες** λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο** (Σχ. 5).



(Σχ. 5)

Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου

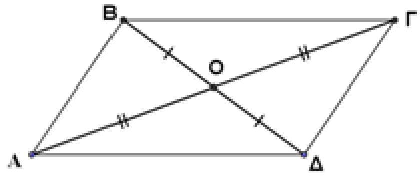
- Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες δηλαδή ισχύει: $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.



Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου

Ιδιότητες του πλάγιου παραλληλογράμμου:

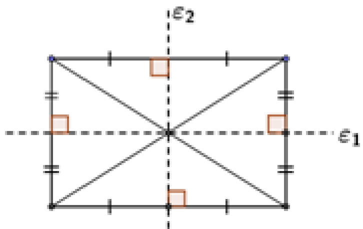
- Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.
- Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του (Σχ. 1).



(Σχ. 1)

Ιδιότητες ορθογωνίου παραλληλογράμμου: έχουμε όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον

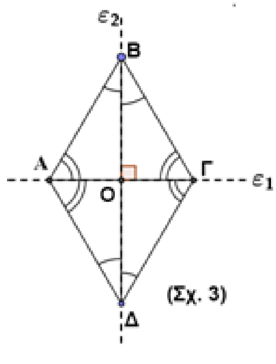
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες.
- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας (Σχ. 2).



(Σχ. 2)

Ιδιότητες του ρόμβου: έχουμε όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον

- Οι διαγώνιες είναι κάθετες.
- Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.
- Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας (Σχ. 3).

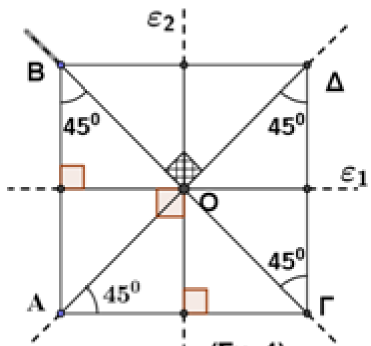


(Σχ. 3)

Ιδιότητες του τετραγώνου: έχουμε όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του ρόμβου.

Δηλαδή:

- Οι διαγώνιές του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του.
- Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας (Σχ. 4).



(Σχ. 4)

Παρατήρηση:
Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο, το αντίστροφο δεν ισχύει.

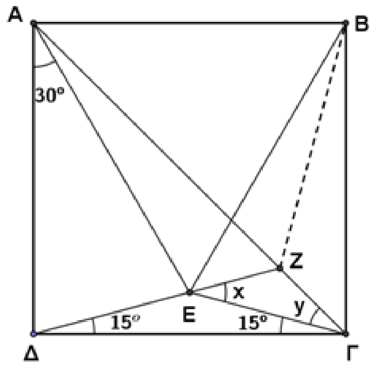
Το τετράγωνο είναι ρόμβος, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ασκήσεις

1) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στο εσωτερικό του τετραγώνου θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ. Η ΔΕ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδειχθεί ότι ΒΖ⊥ΕΓ.

(Μ.Ε. Κύπρου)

Βρίσκεται στη σελίδα 214 του βιβλίου 1

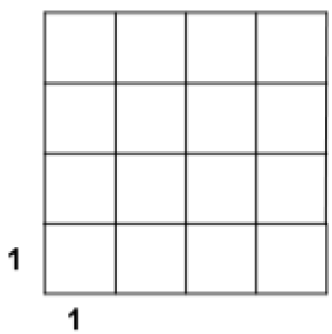


2) Στο διπλανό σχήμα πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν;

(Πανελλήνιος Μαθητικός διαγωνισμός στα Μαθηματικά, 12/11/1988, Γ Γυμνασίου)

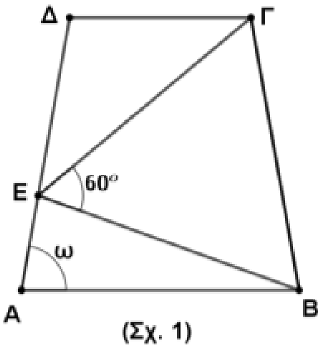
Απάντηση (Τελικό Σύνολο 100).

Βρίσκεται στη σελίδα 217 του βιβλίου 1



3) Στο διπλανό σχήμα 1, δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην πλευρά του ΑΔ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΒΕΓ να είναι ισόπλευρο και τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΓΔΕ να είναι ισοσκελή, με ΑΒ=ΒΕ και ΔΓ=ΔΕ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathbf{B\hat{A}\Delta = \omega}$.

(Θαλής 03/11/2001)



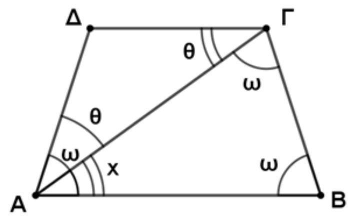
(Σχ. 1)

4) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), δίνεται ότι $\mathbf{\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma = \omega}$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ=ΓΔ.

I. Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\mathbf{\Delta\hat{A}B}$.

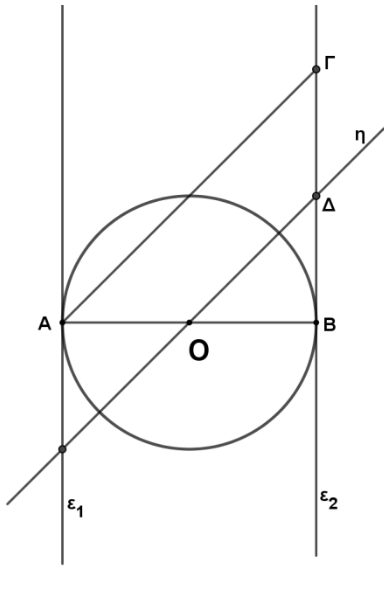
II. Να υπολογίσετε τη γωνία **ω**.

(Θαλής 01/11/2003)



(Σχ. 1)

5) Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ, κέντρο Ο και οι ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ που είναι κάθετες στα άκρα Α και Β της διαμέτρου ΑΒ. Στην ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία **η** να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Η ευθεία **η** τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΟΒΔ.

(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του τμήματος ΒΓ.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΟΔΓ.

(Θαλής 9/11/2019)

Εξισώσεις α΄ βαθμού

Μια αλγεβρική παράσταση που έχει τεθεί ίση με το μηδέν λέγεται **εξίσωση**.

Αν η παράσταση αυτή, αφού εκτελεστούν όλες οι δυνατές πράξεις, περιέχει ένα μόνο γράμμα (μεταβλητή) με εκθέτη τη μονάδα, τότε λέγεται **Εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.**

Παραδείγματα: οι ισότητες 3+x=7, u+6=4, $\frac{2y-5}{4}=\frac{y-4}{3}$ είναι εξισώσεις με άγνωστο το x για την πρώτη, το u για την δεύτερη και y για την τρίτη.

Ξέρουμε πως για κάθε αριθμητική τιμή που παίρνει η μεταβλητή (το γράμμα) η παράσταση παίρνει αντίστοιχα και αυτή, αφού γίνουν οι πράξεις, μια αριθμητική τιμή.

Λύση ή **ρίζα** μιας εξίσωσης είναι ο αριθμός, που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, δηλαδή τη μεταβλητή, επαληθεύει την ισότητα. Συγκεκριμένα για τις προηγούμενες εξισώσεις η τιμή x=4 είναι ρίζα της πρώτης η τιμή u=–2 είναι ρίζα της δεύτερης και η τιμή $y=-\frac{1}{2}$ είναι η ρίζα της τρίτης.

Για να λύσουμε μια εξίσωση πρώτου βαθμού πρέπει να εκτελέσουμε όλες τις αλγεβρικές πράξεις με στόχο να την φέρουμε στη μορφή: $\alpha x=\beta$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και ο x ο άγνωστος, δηλαδή η μεταβλητή. Τότε ή λύση ή η ρίζα της εξίσωσης είναι $x=\frac{\beta}{\alpha}$ με την προϋπόθεση ότι α≠0.

Παράδειγμα: Ας λύσουμε την εξίσωση $\frac{2y-5}{4}=\frac{y-4}{3}$.

Είναι
$$\begin{aligned}\frac{2y-5}{4}=\frac{y-4}{3} &\Leftrightarrow 3(2y-5)=4(y-4)\\ &\Leftrightarrow 6y-15=4y-16\\ &\Leftrightarrow 6y-4y=-16+15\\ &\Leftrightarrow 2y=-1\\ &\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

<u>Συνοπτικά τα βήματα που ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση α΄ βαθμού είναι τα:</u>

- **Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, αν υπάρχουν, πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της εξίσωσης και στα δύο μέλη, με το ΕΚΠ.**
- **Εκτελούμε τις πράξεις**
- **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (Προσοχή: όποιος όρος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο)**
- **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων**
- **Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου.**

Προβλήματα

Οι εξισώσεις α΄ βαθμού πολλές φορές μας βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων που τίθενται στους διαγωνισμούς της ΕΜΕ και όχι μόνο. Πολλές φορές προβλήματα με αριθμούς, από την καθημερινή μας ζωή, παρουσιάζουν δυσκολίες ως προς την επίλυσή τους. Στην παράγραφο αυτή, θα διαπιστώσουμε τη μεγάλη συμβολή των εξισώσεων α΄ βαθμού για τη επίλυση τέτοιων προβλημάτων, που στηρίζεται στο να καταστρώσουμε μια εξίσωση η λύση της οποίας δίνει την απάντηση στο πρόβλημα.

Παράδειγμα: Ρώτησαν ένα βοσκό πόσα πρόβατα έχει, και αυτός απάντησε. Αν είχα όσα έχω και άλλα τόσα και τα μισά που έχω θα ήμουνα βοσκός 100 προβάτων. Πόσα πρόβατα είχε ο βοσκός;

Οι ενέργειες που κάνουμε για να επιλύσουμε ένα τυπικό τέτοιο πρόβλημα είναι:

- **Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και εντοπίζουμε τη ζητούμενη ποσότητα.**
- **Επιλέγουμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε. Συνήθως διευκολύνει να θέτουμε x το μικρότερο από τα ζητούμενα (Αν αυτό μπορεί να εκτιμηθεί).**
- **Εκφράζουμε όλα τα υπόλοιπα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.**
- **Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος, που προκύπτει, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.**
- **Λύνουμε την εξίσωση.**
- **Ελέγχουμε αν η Λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.**

Ασκήσεις

1) Τρεις φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 270. Αν από τον καθένα αφαιρέσουμε τον ίδιο φυσικό αριθμό, παίρνουμε τους αριθμούς 24, 81, 132. Να βρείτε τους τρεις αυτούς αριθμούς. Βρίσκεται στη σελίδα 99 του βιβλίου 1

2) Ένας πελάτης εισέρχεται σ΄ ένα μανάβικο και αγοράζει τα μισά από τα μήλα ενός κιβωτίου και 1 ακόμη μήλο. Ένας δεύτερος πελάτης αγοράζει ξανά τα μισά από αυτά που έμειναν και 1 ακόμη μήλο. Το ίδιο ακριβώς κάνουν 4 ακόμα πελάτες, οπότε τα μήλα τελειώνουν. Πόσα μήλα είχε το κιβώτιο; Βρίσκεται στη σελίδα 99 του βιβλίου 1

3) Τρείς άνδρες, ο Γιώργος (Γ), ο Βασίλης(Β) και ο Νίκος(Ν) πήγαν σε ένα πανηγύρι με τις γυναίκες τους την Ελένη(Ε), την Φροσύνη(Φ) και την Άννα(Α). Ο καθένας τους αγόρασε διαφορετικό αριθμό πραγμάτων. Κάθε πρόσωπο πλήρωσε αριθμό ευρώ ανάλογο με τον αριθμό πραγμάτων που αγόρασε. Κάθε άνδρας ξόδεψε 45 € περισσότερα από τη γυναίκα του. Βρείτε ποια είναι τα ζευγάρια αν γνωρίζεται ότι ο Γιώργος αγόρασε 17 πράγματα παραπάνω από την Άννα και ο Νίκος 7 πράγματα παραπάνω από την Ελένη. Βρίσκεται στη σελίδα 101 του βιβλίου 1

4) Διάλογος στην τάξη:

Καθηγητής: Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-25}{1975}+\frac{x-23}{1977}+\frac{x-21}{1979}+\frac{x-19}{1981}+\frac{x-17}{1983}+\frac{x-15}{1985}=$$
$$\frac{x-1975}{25}+\frac{x-1977}{23}+\frac{x-1979}{21}+\frac{x-1981}{19}+\frac{x-1983}{17}+\frac{x-1985}{15} \quad (1).$$

Ένας μαθητής: "Πολύ δύσκολη άσκηση, κύριε, ούτε μέχρι το 2000 δεν πρόκειται να τη λύσουμε". Μπορείτε εσείς να λύσετε την πολύ δύσκολη άσκηση;

(Πανελλήνιος μαθηματικός διαγωνισμός, 9/11/1985, θέμα Α Λυκείου , που ήταν και επιλογή για τη Γ Γυμνασίου). Βρίσκεται στη σελίδα 103 του βιβλίου 1

5) Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

I. Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου

II. Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

(Θαλής 21/11/2009)

6) Ένας οικογενειάρχης πήρε από την Τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας.

Αν του έμειναν τελικά 1360 €, να βρείτε:

I. Πόσα χρήματα πήρε από την Τράπεζα ο οικογενειάρχης.

II. Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

(Θαλής 19/10/2013)

7) Ένα ορθογώνιο έχει μήκος α=6 μέτρα και πλάτος β=4 μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

I. Η περίμετρος του ορθογωνίου

II. Το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Θαλής 14/11/2015)

8) Ο Νίκος επισκέφτηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματά του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

(Θαλής 10/11/2018)

9) Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 €, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας. (Θαλής 9/11/2019)

(Η παρακάτω ύλη Βρίσκεται στο 3ο βιβλίο του Παραρτήματος ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Πιθανότητες, Συνδυαστική, Παίγνια)

Η Ευκλείδεια Διαίρεση

Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια διαίρεση ότι εάν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς Δ (Διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) με $\delta\neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι π (πηλίκο) και υ (υπόλοιπο) τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$\Delta=\pi\cdot\delta+\upsilon,\ 0\leq\upsilon<\delta$ **(Ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης)**

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και γενικότερα για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β.

Ειδικά αν $\upsilon=0$ τότε $\Delta=\pi\cdot\delta$, στην περίπτωση αυτή η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και λέμε ότι ο Δ διαιρείται με τον δ και γράφουμε δ/Δ ή ότι ο δ είναι διαιρέτης του Δ ή ότι ο Δ είναι πολλαπλάσιο το δ και γράφουμε Δ=πολδ.

Αν ο δ δεν διαιρεί τον Δ , γράφουμε $\delta\nmid\Delta$.

Ασκήσεις

1) Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό Α με τον 15 βρίσκουμε υπόλοιπο 12. Τι υπόλοιπο θα βρούμε αν διαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό Α με τον 5; Βρίσκεται στη σελίδα 8 του βιβλίου 3

2) Θεωρούμε τον αριθμό $A=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2003+47$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού Α με το 21. Βρίσκεται στη σελίδα 8 του βιβλίου 3

3) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης α:6 είναι 5, το υπόλοιπο της διαίρεσης του α:4 είναι 3 και ο α είναι ακέραιος, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης α:12. Βρίσκεται στη σελίδα 9 του βιβλίου 3

Παρατήρηση:

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαίρεση ενός ακεραίου αριθμού α με το **2.**

Θα είναι: $\alpha=2\pi+\upsilon,\ \upsilon=0,1$

Αν $\upsilon=0$, τότε $\alpha=2\pi$ και ο α λέγεται **άρτιος.**

Αν $\upsilon=1$, τότε $\alpha=2\pi+1$ και ο α λέγεται **περιττός.**

Ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $A=\dfrac{2\nu-1+3(-1)^{\nu-1}}{4}$ είναι ακέραιος για κάθε τιμή του ακεραίου ν (ν∈Ζ). Βρίσκεται στη σελίδα 13 του βιβλίου 3

2) Ένας μαθητής αγόρασε ένα βιβλίο με Ολυμπιάδες Μαθηματικών, το οποίο είχε 256 σελίδες. Ο μικρός του όμως αδελφός έσκισε κατά λάθος 25 φύλλα, όχι αναγκαστικά συνεχόμενα. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των αριθμών με τους οποίους ήταν αριθμημένες αυτές οι 50 σελίδες δεν μπορεί να είναι 2004. Βρίσκεται στη σελίδα 14 του βιβλίου 3

3) Να εξετασθεί αν έχει ακέραιη λύση η εξίσωση:
$x(x-1)+(x-1)(x+1)+x(x+1)+3x^{\nu}=100^{100}$, $\nu\in N^{*}$. Βρίσκεται στη σελίδα 14 του βιβλίου 3

4) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x και y έτσι ώστε να ισχύει $2^{x-2004}+2xy=4009$. Βρίσκεται στη σελίδα 15 του βιβλίου 3

5) Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίον διαιρούμε με το 4

I) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;
II) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1. (Θαλής 21 11/2009)

6) Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\dfrac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δύο αριθμούς. (Θαλής 19/10/2013)

Δεκαδικές παραστάσεις θετικών ακεραίων αριθμών

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε έχει 10 ψηφία Α={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
Η δεκαδική παράσταση ενός αριθμού φαίνεται από τα παρακάτω παραδείγματα.:
35=3·10+5, γενικά $\overline{\alpha\beta}=\alpha\cdot 10+\beta$, α,β∈Α, α≠0. Η παύλα πάνω από τον αριθμό αβ μπαίνει ώστε να γίνεται διάκριση από το γινόμενο αβ.
$521=5\cdot 10^2+2\cdot 10+1$, γενικά $\overline{\alpha\beta\gamma}=\alpha\cdot 10^2+\beta\cdot 10+\gamma$ με α,β,γ∈Α, α≠0.

Επίσης $\overline{αβγδ} = α \cdot 10^3 + β \cdot 10^2 + γ \cdot 10 + δ = 1000α + \overline{βγδ} = 10^3 α + 10^2 β + \overline{γδ}$, α,β,γ,δ∈A, α≠0.

Γενικά ένας αριθμός Α με ν+1 ψηφία θα γράφεται

Α=$\overline{α_ν α_{ν-1} \dots α_1 α_0} = α_ν \cdot 10^ν + α_{ν-1} \cdot 10^{ν-1} \dots + α_1 \cdot 10 + α_0 = 10^ν α_ν + \overline{α_{ν-1} α_{ν-2} \dots α_1 α_o} =$

$10^ν α_ν + 10^{ν-1} α_{ν-1} + \overline{α_{ν-2} α_{ν-3} \dots α_1 α_o}$, $α_ν, α_{ν-1}, .. α_o \in A$ με $α_ν \neq 0$

Σημείωση: Μπορούμε να γράφουμε

- $\overline{αβγ} = α \cdot 10^2 + β \cdot 10 + γ$=10(10α+β)+γ=10κ+γ=100α+$\overline{βγ}$ α,β,γ∈A, α≠0.
- $\overline{αβγδ} = α \cdot 10^3 + β \cdot 10^2 + γ \cdot 10 + δ = 10(100α + 10β + γ) + δ = 10μ + δ$ ή $\overline{αβγδ} = 100(10α + β) + \overline{γδ} = 100λ + \overline{γδ}$, ή $\overline{αβγδ} = 1000α + \overline{βγδ}$, με α,β,γ,δ∈A, α≠0 κ.λ.π.

Ασκήσεις

1) Βρείτε το άθροισμα όλων των τριών ψηφίων αριθμών εάν χρησιμοποιήσουμε τα διαφορετικά ψηφία α, β, γ και εάν δεν μας επιτρέπεται να επαναλάβουμε ένα ψηφίο (όσον αφορά τα α, β, γ). Βρίσκεται στη σελίδα 45 του βιβλίου 3

2) Αν $\overline{αβγδ}$ είναι ένας τετραψήφιος θετικός ακέραιος του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης τέτοιος ώστε: α+δ=(β+γ)+πολ7 να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\mathbf{A = \overline{αβ7γδ} + \overline{δγ7βα} = πολ7}$. Βρίσκεται στη σελίδα 46 του βιβλίου 3

3) Ένας τετραψήφιος αριθμός Κ έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20

I) Να βρεθεί ο αριθμός Κ

II) Να βρεθεί δεκαδικός αριθμός α και φυσικός αριθμός ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: Κ=α·$10^ν$, με 1≤α<10.

(Θαλής 30/10/2004)

<u>Συνοπτική παρουσίαση κριτηρίων διαιρετότητας</u>

Έστω Ν=$\overline{α_ν α_{ν-1} \dots α_1 α_o} = 10^ν α_ν + 10^{ν-1} α_{ν-1} + \cdots + 10^3 α_3 + 10^2 α_2 + 10 α_1 + α_0$.

1) 2/Ν ⇔2/$α_o$
2) 5/Ν⇔ $α_o = 0$ ή 5
3) 3/Ν ⇔ $3/α_0 + α_1 + α_2 + .. + α_ν$
4) 9/Ν⇔ $9/α_0 + α_1 + α_2 + .. + α_ν$
5) 4/Ν ⇔ $4/α_0 + 10α_1$
6) 25/Ν⇔ $\overline{α_1 α_0} = 00$ ή 25 ή 50 ή 75
7) 8/Ν⇔ $8/α_0 + 10α_1 + 100α_2$
8) 125/Ν⇔ $\overline{α_2 α_1 α_0} = 000$ ή 125 ή 250 ή 375 ή 500 ή 625 ή 750 ή 875
9) 11/Ν⇔ $11/α_0 - α_1 + α_2 - α_3 + .. + (-1)^ν α_ν$.

Ασκήσεις

1) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x και y που είναι διαφορετικοί από το μηδέν και ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{x-1}{4}=\frac{2}{y+2}$. Βρίσκεται στη σελίδα 75 του βιβλίου 3

2) Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς x που διαιρούνται με τον 10 και έχουν ακριβώς 6 διαιρέτες. Βρίσκεται στη σελίδα 75 του βιβλίου 3

3) Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

(Θαλής 12/11/2016)

4) Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α. (Θαλής 11/11/17)

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Οι διαιρέτες του 10 είναι $Δ_{10}=\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$
- Ο αριθμός ±1 διαιρεί οποιονδήποτε ακέραιο α
- Ο αριθμός 0 διαιρείται από οποιονδήποτε ακέραιο α≠0 (0=α·0+0)
- Κάθε ακέραιος αριθμός α διαιρείται τουλάχιστον από το ±α και το ±1
- Το σύνολο των διαιρετών κάθε ακεραίου αριθμού είναι πεπερασμένο και μη κενό.

Στα επόμενα οι ορισμοί και τα θεωρήματα θα αναφέρονται σε θετικούς ακεραίους, δηλαδή σε φυσικούς αριθμούς και ότι ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς θα ισχύει και για τους ακέραιους.

Οι διαιρέτες του 5 είναι $Δ_5=\{1,5\}$, δηλαδή οι μόνοι διαιρέτες του 5 είναι το 1 και το ίδιο το 5.

Οι ακέραιοι που έχουν μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό τους και τη μονάδα λέγονται πρώτοι αριθμοί.

Π. χ πρώτοι αριθμοί είναι οι 2,3,5,7,…
Οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί εκτός από το 2 που είναι άρτιος.
Κάθε περιττός δεν είναι και πρώτος π. χ 21=3·7

- Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι

Το σύνολο των διαιρετών του 12 είναι $Δ_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$ και το σύνολο των διαιρετών του 20 είναι $Δ_{20}=\{1,2,4,5,10,20\}$. Παρατηρούμε ότι οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών 12 και 20 είναι οι {1,2,4} και το 4 είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 12 και 20. Το 4 θα λέγεται μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 12 και 20 και συμβολίζουμε (12,20)=4.

Γενικά : Αν α, β είναι δύο ακέραιοι αριθμοί , με α≠0 ή β≠0, ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ) των α και β το μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες των α και β και συμβολίζουμε (α, β)=δ.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο ΕΚΠ

Έστω οι ακέραιοι 5 και –7 και κάποια πολλαπλάσιά τους
Π(5) …–15, –10, –5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...
Π(7) …–14, –7, 0, 7, 14 21, 28, 35, 42,…
Οι αριθμοί ..., –70, –35,0, 35, 70, 105,…είναι κοινά πολλαπλάσια των 5 και –7. Οι αριθμοί 5 και –7 έχουν άπειρα κοινά πολλαπλάσια , το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια αυτών των αριθμών, το ονομάζουμε ελάχιστο κοινά πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και -7 και το συμβολίζουμε ε=[5,–7]=35>0
Γενικά: Έστω $\alpha,\beta\in Z^*$ ένας αριθμός γ που είναι πολλαπλάσιο και του α και του β λέγεται κοινό πολλαπλάσιο των α και β.
Ο αριθμός $|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι ένα κοινό πολλαπλάσιο των α και β και μάλιστα θετικό κοινό πολλαπλάσιο .
Το σύνολο των θετικών κοινών πολλαπλασίων των α και β είναι διάφορα του κενού συνόλου.
Το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου των θετικών κοινών πολλαπλασίων των α και β, λέγεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των α, β και συμβολίζεται με ε=[α, β].
Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $\alpha, \beta\in Z^*$, τότε το ΕΚΠ ε των α, β είναι ο μοναδικός θετικός ακέραιος με τις ιδιότητες:

- ε=πολα και ε=πολβ
- Αν κ ένα θετικό κοινό πολλαπλάσιο των α και β τότε ε≤κ.

Για να βρούμε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών τους αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για το ΜΚΔ παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες μιά φορά τον καθένα με τον μικρότερο εκθέτη και για το ΕΚΠ παίρνουμε τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες μετ τον μεγαλύτερο εκθέτη.

Για παράδειγμα να βρούμε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών 2520, 588, 3150.

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

3150	2
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$588 = 2^2\cdot 3\cdot 7^2$$

$$2520 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$$

$$3150 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2$$

Είναι ΜΚΔ(2520, 588, 3150)=$2\cdot3\cdot7$ και ΕΚΠ(2520, 588, 3150)= $2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2$.

Ασκήσεις

1) Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α, Β και Γ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3 αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης. (Θαλής 24/11/2007)

2) Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1$, x, $x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3. (Θαλής 14/11/2015)

3) Να βρείτε:

I. Την τιμή της παράστασης: $\mathbf{A=\dfrac{(111111+222222+...+999999)^{2004}}{(111+222+...+999)^{2004}}}$ ως δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό.

II. Τους πρώτους διαιρέτες του Α. Βρίσκεται στη σελίδα 163 του βιβλίου 3

4) Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός ακέραιος και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\dfrac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}$.

(Θαλής 19/11/2011)