



Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός v είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι για τον αριθμό

$$κ = \frac{(-2)^{3v+2} + (-2)^{2v+3}}{(-2)^v - 2}, \text{ ισχύουν:}$$

- α) $κ > 3 \cdot 4^v$
β) $κ > 15$

Πρόβλημα 2

Σε μια πολιτική δεξίωση θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε 342 κιλά ψωμί. Ο Chef (διευθυντής κουζίνας) επιλέγει πάντα μια σπάνια ποικιλία σιταριού η οποία στο άλεσμά της χάνει το 25% του βάρους της, αλλά το υπέροχο αλεύρι που παράγει αυξάνει στο ζύμωμα το βάρος του κατά 50%. Αν γνωρίζουμε ακόμα ότι στο ψήσιμο θα χαθεί αναπόφευκτα το 20% του βάρους του ζυμαριού, να βρείτε:

- α) Πόσα κιλά σιταριού πρέπει να παραγγείλουμε για την κατασκευή των 342 κιλών ψωμιού.
β) Ο Sous Chef (δεύτερος στην ιεραρχία) υπολόγισε ότι από το αρχικό βάρος του σιταριού που θα παραγγείλουμε το $\frac{1}{9}$ δεν θα γίνει τελικά ψωμί.

Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{(-2020)^v}{2019v+3}$ και $\beta = \frac{(-2020)^v}{2019v+4}$, όπου v θετικός ακέραιος.

Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{v^2 + 2019}{4}$ είναι επίσης θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ένα τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $\alpha = 1$, το ισόπλευρο τρίγωνο $ΔΖΓ$ εντός του τετραγώνου και το ισόπλευρο $ΒΕΓ$ εκτός αυτού.

- α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΖΓΕ$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $ΒΖΕ$.

