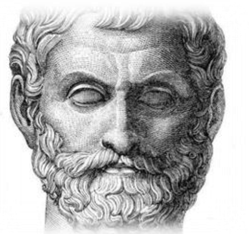
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
« Ο ΘΑΛΗΣ »



Γ' Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι για τον αριθμό

$$\kappa=\frac{(-2)^{3\nu+2}+(-2)^{2\nu+3}}{(-2)^{\nu}-2}\ ,$$ ισχύουν:

α) $\kappa>3\cdot 4^{\nu}$
β) $\kappa>15$

Πρόβλημα 2

Σε μια πολιτική δεξίωση θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε 342 κιλά ψωμί.
Ο Chef (διευθυντής κουζίνας) επιλέγει πάντα μια σπάνια ποικιλία σιταριού η οποία στο άλεσμά της χάνει το 25% του βάρους της, αλλά το υπέροχο αλεύρι που παράγει αυξάνει στο ζύμωμα το βάρος του κατά 50%. Αν γνωρίζουμε ακόμα ότι στο ψήσιμο θα χαθεί αναπόφευκτα το 20% του βάρους του ζυμαριού, να βρείτε:
α) Πόσα κιλά σιταριού πρέπει να παραγγείλουμε για την κατασκευή των 342 κιλών ψωμιού.
β) Ο Sous Chef (δεύτερος στην ιεραρχία) υπολόγισε ότι από το αρχικό βάρος του σιταριού που θα παραγγείλουμε το $\frac{1}{9}$ δεν θα γίνει τελικά ψωμί.
Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{(-2020)^{\nu}}{2019\nu+3}$ και $\beta=\frac{(-2020)^{\nu}}{2019\nu+4}$, όπου ν θετικός ακέραιος.

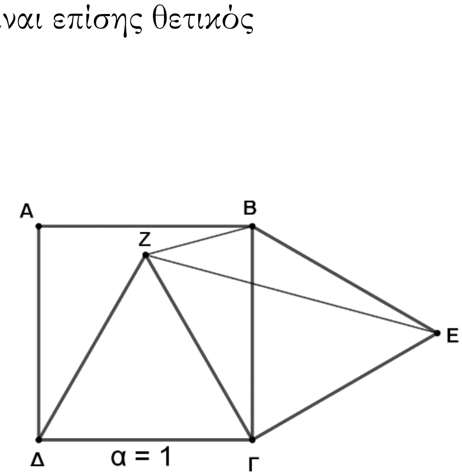
Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\nu^2+2019}{4}$ είναι επίσης θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha=1$, το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΖΓ εντός του τετραγώνου και το ισόπλευρο ΒΕΓ εκτός αυτού.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΒΖΕ.



ΠΑΤΡΑ 27 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2019

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι για τον αριθμό

$$\kappa=\frac{(-2)^{3\nu+2}+(-2)^{2\nu+3}}{(-2)^{\nu}-2}\ ,\ \text{ισχύουν:}$$

α) $\kappa>3\cdot 4^{\nu}$

β) $\kappa>15$

Λύση

α) Ο αριθμός κ γράφεται:

$$\kappa=\frac{(-2)^{3\nu+2}+(-2)^{2\nu+3}}{(-2)^{\nu}-2}=\frac{(-2)^{2\nu+2}\cdot(-2)^{\nu}+(-2)^{2\nu+2}\cdot(-2)}{(-2)^{\nu}-2}=$$

$$\frac{(-2)^{2\nu+2}\cdot\left((-2)^{\nu}+(-2)\right)}{(-2)^{\nu}-2}=\frac{(-2)^{2(\nu+1)}\cdot\left((-2)^{\nu}-2\right)}{(-2)^{\nu}-2}\overset{*}{=}\left((-2)^{2}\right)^{\nu+1}=4^{\nu+1}\ .$$

Όμως $4^{\nu+1}=4\cdot 4^{\nu}>3\cdot 4^{\nu}$ άρα $\kappa>3\cdot 4^{\nu}$.

(*) Για κάθε θετικό ακέραιο ν, είναι $(-2)^{\nu}-2\neq 0$, αφού $(-2)^{\nu}\neq 2$.

Πράγματι, αν ν περιττός ο αριθμός $(-2)^{\nu}$ είναι αρνητικός οπότε είναι πάντα διαφορετικός από τον θετικό 2, ενώ αν είναι άρτιος, η μικρότερη τιμή του είναι το 4 για $\nu=2$ που είναι επίσης διάφορη του 2.

β) Είναι $\kappa=4^{\nu+1}$ και αφού ν θετικός ακέραιος η μικρότερη τιμή του είναι η $\nu=1$ για την οποία έχω: $\kappa=4^{1+1}=4^{2}=16>15$. Άρα $\kappa>15$.

Πρόβλημα 2

Σε μια πολιτική δεξίωση θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε 342 κιλά ψωμί.
Ο Chef (διευθυντής κουζίνας) επιλέγει πάντα μια σπάνια ποικιλία σιταριού η οποία στο άλεσμά της χάνει το 25% του βάρους της, αλλά το υπέροχο αλεύρι που παράγει αυξάνει στο ζύμωμα το βάρος του κατά 50%. Αν γνωρίζουμε ακόμα ότι στο ψήσιμο θα χαθεί αναπόφευκτα το 20% του βάρους του ζυμαριού, να βρείτε:
α) Πόσα κιλά σιταριού πρέπει να παραγγείλουμε για την κατασκευή των 342 κιλών ψωμιού.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να παραγγείλουμε x κιλά από αυτή την σπάνια ποικιλία σιταριού.

Από τα δεδομένα μας προκύπτουν τα εξής:

1

Κατά το άλεσμα, τα x κιλά θα μειωθούν κατά 25%, άρα θα γίνουν: $x - \frac{25}{100}x = \frac{75}{100}x = \frac{3}{4}x$

2

Κατά το ζύμωμα, τα $\frac{3}{4}x$ κιλά αλεύρι θα αυξηθούν κατά 50%, άρα θα γίνουν:
$\frac{3}{4}x + \frac{50}{100}\cdot\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}x = \frac{9}{8}x$ κιλά ζυμάρι.

3

Κατά το ψήσιμο, τα $\frac{9}{8}x$ κιλά ζυμάρι θα μειωθούν κατά 20%, άρα θα γίνουν:
$\frac{9}{8}x - \frac{20}{100}\cdot\frac{9}{8}x = \frac{9}{8}x - \frac{9}{40}x = \frac{36}{40}x = \frac{9}{10}x$ κιλά ψωμί.

Θέλουμε λοιπόν τα $\frac{9}{10}x$ κιλά ψωμί να είναι ίσα με 342 κιλά. Λύνοντας την εξίσωσή μας ως προς x έχουμε:

$$\frac{9}{10}x = 342 \Leftrightarrow x = \frac{10}{9}\cdot 342 \Leftrightarrow x = 380 \text{ κιλά.}$$

Συνεπώς θα πρέπει να παραγγείλουμε 380 κιλά σιτάρι.

β) Ο Sous Chef (δεύτερος στην ιεραρχία) υπολόγισε ότι από το αρχικό βάρος του σιταριού που θα παραγγείλουμε το $\frac{1}{9}$ δεν θα γίνει τελικά ψωμί.

Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Δεν έχει δίκιο! Από τα 380 κιλά σιτάρι φτιάξαμε 342 κιλά ψωμί, συνεπώς στο άλεσμα και στο ψήσιμο «χάθηκαν» τα $380 - 342 = 38$ κιλά. Τα 38 κιλά αποτελούν το $\frac{1}{10}$ του συνολικού βάρους του σιταριού και όχι το $\frac{1}{9}$ αφού είναι: $\frac{38}{380} = \frac{38}{38\cdot 10} = \frac{1}{10}$.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{(-2020)^{\nu}}{2019\nu + 3}$ και $\beta = \frac{(-2020)^{\nu}}{2019\nu + 4}$, όπου ν θετικός ακέραιος.

Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\nu^2 + 2019}{4}$ είναι επίσης θετικός ακέραιος.

Λύση

Αν ο ν ήταν άρτιος, τότε θα ήταν $\alpha > \beta$ διότι από δύο θετικά κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μικρότερο παρονομαστή. Είναι δεδομένο όμως ότι $\alpha < \beta$ άρα ο ν είναι περιττός και οι αριθμοί α, β είναι αρνητικοί με τον β να βρίσκεται πιο κοντά στο μηδέν απ' ότι ο α αφού είναι αρνητικός με μεγαλύτερο παρονομαστή.

Συνεπώς ο ν ως περιττός, θετικός ακέραιος, θα έχει μορφή $\nu = 2\lambda + 1$, με $\lambda \in \mathbb{N}$.

Άρα:

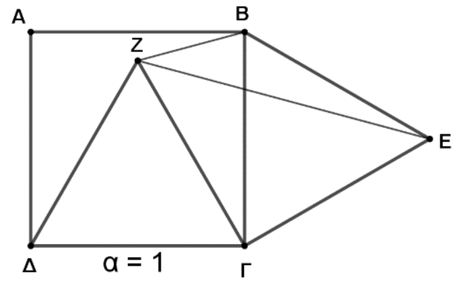
$$\frac{\nu^2+2019}{4}=\frac{(2\lambda+1)^2+2019}{4}=\frac{4\lambda^2+4\lambda+1+2019}{4}=\frac{4\lambda^2+4\lambda+2020}{4}=$$

$\dfrac{4\cdot(\lambda^2+\lambda+505)}{4}=\lambda^2+\lambda+505$ που είναι επίσης ένας θετικός ακέραιος αφού $\lambda\in\mathbb{N}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha=1$, το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΖΓ εντός του τετραγώνου και το ισόπλευρο ΒΕΓ εκτός αυτού.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

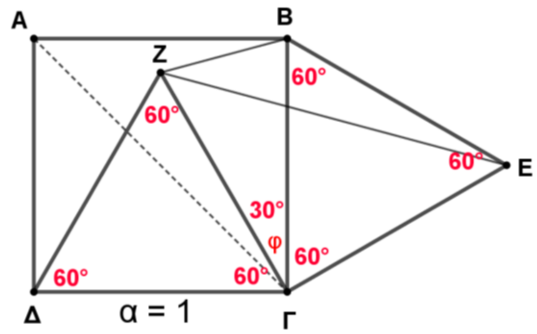


Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{\mathrm{B}}=90^o$) και ισοσκελές με ΒΓ = ΒΑ = 1 συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι:

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}.$$

Το τρίγωνο ΖΓΕ είναι επίσης ορθογώνιο αφού $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=90^o$.



Πράγματι:

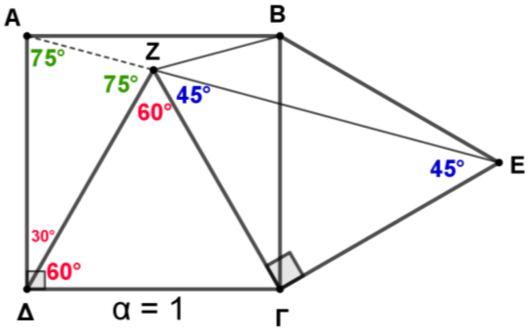
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\hat{\varphi}+60^o=\left(\hat{\Gamma}-\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta\right)+60^o=\left(90^o-60^o\right)+60^o=90^o$$

Άρα το εμβαδόν του θα είναι: $(\mathrm{Z\Gamma E})=\dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\mathrm{Z}\cdot\Gamma\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1=\dfrac{1}{2}$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι ίσα μεταξύ τους.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΒΖΕ.

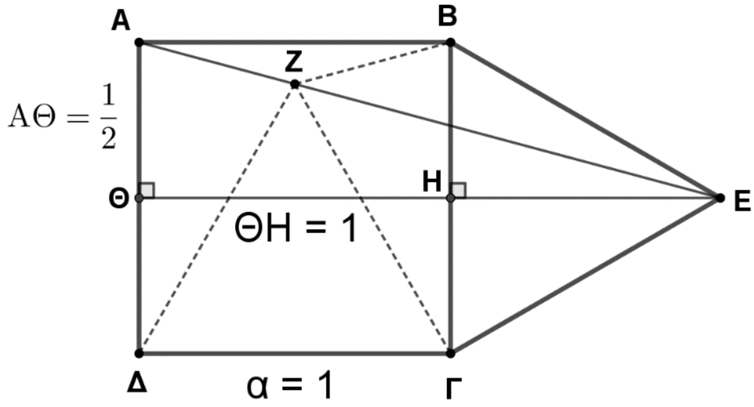
Λύση



Παρατηρούμε αρχικά ότι τα σημεία Α, Ζ και Ε είναι συνευθειακά αφού η γωνιά $A\hat{Z}E$ είναι ίση με 180°. (βλέπε σχήμα) Στο τρίγωνο ΑΖΒ, οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες με $90^o - 75^o = 15^o$ η κάθε μία, άρα το ΑΖΒ είναι ισοσκελές με ΖΒ = ΖΑ. (1)

Συνεπώς η περίμετρος Π του τριγώνου ΖΒΕ που είναι ίση με ΕΖ+ΖΒ+ΒΕ θα είναι ίση και με το άθροισμα ΕΖ+ΖΑ+ΒΕ λόγω της (1). Άρα η ζητούμενη περίμετρος θα είναι ίση με ΕΑ+1 αφού ΕΖ+ΖΑ=ΕΑ και ΒΕ = α =1.

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε την ΕΑ.
Από το Ε φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ η οποία τέμνει επίσης κάθετα την παράλληλη σ' αυτήν ΑΔ στο σημείο Θ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Επειδή το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισόπλευρο, το ύψος του ΕΗ είναι και διάμεσος, άρα το Η είναι μέσο της ΒΓ.
Το ΑΒΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και οι γωνίες του είναι ορθές, άρα θα είναι και ΑΘ=ΒΗ=1/2.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΒΗΕ προκύπτει ότι:

$$EH^2 + BH^2 = BE^2 \Leftrightarrow EH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow EH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΘΕ έχουμε:

$$EA^2 = A\Theta^2 + \Theta E^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3}.$$

Άρα $EA = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, άρα το ζητούμενο άθροισμα ΕΑ+1 θα είναι ίσο με $1 + \sqrt{2+\sqrt{3}}$, που είναι και η περίμετρος του τριγώνου ΖΒΕ.