



## Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \left[ \frac{(-21)^3}{7^3} + \frac{10}{26} : \frac{\frac{5}{8}}{3 + \frac{2}{8}} \right] \cdot \left[ \frac{64^{-2}}{(-256)^{-2}} + (3^3 - 5^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \right]$$

## Πρόβλημα 2

Αν  $\frac{(-1)^v}{v+1} > \frac{(-1)^v}{v}$  με  $v$  θετικό ακέραιο, να δείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{v+2019}{2}$  είναι επίσης θετικός ακέραιος.

## Πρόβλημα 3

Ένα κινητό τηλέφωνο κοστίζει 800 €. Στην περίοδο των εκπτώσεων μειώθηκε η τιμή του κατά 20% και μια βδομάδα μετά βγήκε σε προσφορά, για λίγες μέρες, με επιπλέον μείωση 20%. Να βρείτε το ποσοστό αύξησης επί τοις εκατό, ώστε μετά το τέλος της προσφοράς, η τιμή του κινητού να επανέλθει στα 800 €.

## Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $AB < A\Gamma$  και  $\Delta$  το μέσον της  $A\Gamma$ . Φέρνουμε την κάθετη της  $A\Gamma$  στο  $\Delta$  και έστω  $E$  το σημείο τομής της με την  $B\Gamma$ .

- i) Να αποδείξετε ότι  $AE = EF = EB$ .
- ii) Έστω  $AZ \perp B\Gamma$  και  $H$  το σημείο τομής της  $\Delta E$  με την προέκταση της  $AZ$ . Αν το  $Z$  είναι το μέσον της  $AH$  να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- iii) Φέρνουμε ευθεία  $(\epsilon)$  που διέρχεται από το  $A$  και είναι παράλληλη προς την  $B\Gamma$ . Έστω  $\Theta$  το σημείο τομής της  $(\epsilon)$  με την προέκταση της  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι  $\Theta B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A\Theta E}$ .

## Ενδεικτικές Λύσεις

### Πρόβλημα 1

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \mathbf{A} &= \left[ \left( -\frac{21}{7} \right)^3 + \frac{10}{26} \cdot \frac{5}{\frac{8}{26}} \right] \cdot \left[ \left( -\frac{64}{256} \right)^{-2} + (27-25) \cdot (-3) \right] = \\ &= \left[ (-3)^3 + \frac{10}{26} \cdot \frac{5}{\frac{8}{26}} \right] \cdot \left[ \left( -\frac{1}{4} \right)^{-2} + 2 \cdot (-3) \right] = \left[ -27 + \frac{10}{26} \cdot \frac{26}{5} \right] \cdot \left[ (-4)^2 - 6 \right] = \\ &= [-27 + 2] \cdot [16 - 6] = -250. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Ξέρουμε ότι αν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, τότε μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μικρότερο παρονομαστή. Στην δική μας περίπτωση δεν συμβαίνει αυτό, άρα θα πρέπει ο αριθμητής  $(-1)^n$  να είναι αρνητικός. Αυτό θα γίνεται μόνο αν το  $n$  είναι αριθμός περιττός, δηλαδή  $n=2k+1$ .

Για  $n=2k+1$  θα έχουμε:  $\frac{n+2019}{2} = \frac{2k+1+2019}{2} = \frac{2k+2020}{2} = k+1010$  που είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

### Πρόβλημα 3

Με την πρώτη έκπτωση θα έχουμε:  $800 - \frac{20}{100} 800 = 800 - 160 = 640$ .

Με την δεύτερη έκπτωση θα έχουμε:  $640 - \frac{20}{100} 640 = 640 - 128 = 512$ .

Επειδή θέλουμε να βρούμε το ποσοστό αύξησης επί τοις εκατό ώστε η τιμή του κινητού να επανέλθει στα 800 €, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 512 + \frac{\varepsilon}{100} 512 &= 800 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{100} 512 = 800 - 512 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{100} 512 = 288 \Rightarrow \varepsilon \cdot 512 = 28800 \\ \Rightarrow \varepsilon &= \frac{28800}{512} = 56,25. \end{aligned}$$

Άρα το ποσοστό αύξησης θα είναι 56,25%.

## Πρόβλημα 4

i) Η ΔΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, άρα θα είναι ΕΑ=ΕΓ, οπότε θα είναι

$$\hat{EAG} = \hat{AGE} = \hat{AGB} \quad (1).$$

Είναι  $\hat{BAE} + \hat{EAG} = 90^\circ$  (2) και  $\hat{ABE} + \hat{AGB} = 90^\circ$  (3).

Από τις (2), (3) έχουμε

$$\hat{BAE} + \hat{EAG} = \hat{ABE} + \hat{AGB} \Rightarrow$$

$\hat{BAE} = \hat{ABE}$ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι  
ισοσκελές, άρα ΑΕ=ΕΒ=ΕΓ.

ii) Επειδή το Ζ είναι μέσο της ΑΗ και  
 $EZ \perp AH$ , η ΕΖ θα είναι μεσοκάθετος της ΑΗ,  
οπότε θα είναι ΕΑ=ΕΗ και  $\hat{AEZ} = \hat{ZEH}$  (4).

Όμοια  $\hat{AED} = \hat{DEG}$  (5) και επειδή

$\hat{DEG} = \hat{ZEH}$  ως κατά κορυφή, λόγω των (4) και

(5) θα είναι  $\hat{AEZ} = \hat{AED} = \hat{DEG} = 60^\circ$  και από

το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ θα είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ .

(2<sup>ος</sup> τρόπος)

Επειδή η ΔΗ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ θα είναι ΑΗ=ΗΓ.

Όμοια επειδή ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΗ θα είναι ΓΑ=ΓΗ, οπότε από την  
προηγούμενη σχέση θα είναι ΓΑ=ΓΗ=ΑΗ, άρα το τρίγωνο ΑΗΓ είναι  
ισόπλευρο, οπότε  $\hat{HAG} = 60^\circ$  και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ θα είναι  
 $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ .

iii) Το ΑΒΕΘ είναι παραλληλόγραμμο. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές και  
έχει μια γωνία  $60^\circ$  ( $\hat{AEZ} = \hat{AEB} = 60^\circ$ ), άρα είναι ισόπλευρο, οπότε ΑΒ=ΒΕ,  
άρα το ΑΒ = ΑΘ, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΘ θα είναι  
 $\hat{AB\Theta} = \hat{A\Theta B}$  και λόγω παραλληλίας (ΑΒ//ΕΘ) θα είναι

$\hat{AB\Theta} = \hat{B\Theta E} = \hat{A\Theta B}$ , άρα ΘΒ διχοτόμος.

