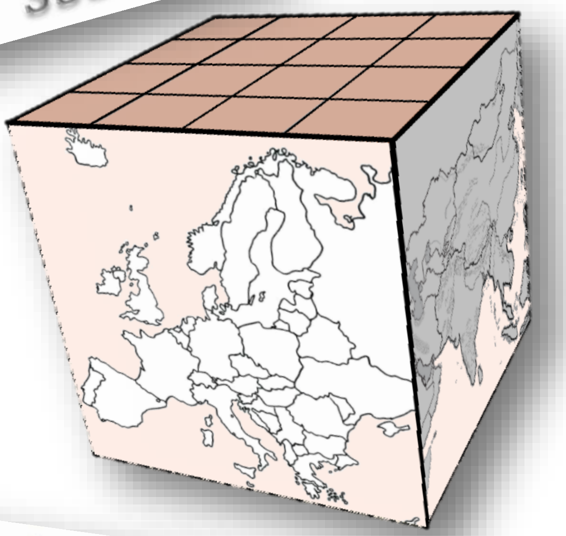
ΕΛΛΗΝΙΚΗ **Μ**ΑΘΗΜΑΤΙΚΗ **Ε**ΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΠΠΙΑΣ 2019

$$\frac{11111}{33333}+\frac{1111}{3333}+\frac{111}{333}+\frac{15}{3}$$



$$\frac{1}{6}<\frac{\nu}{15}<\frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΤΡΑ 30 ΜΑΡΤΙΟΥ 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΠΠΙΑΣ 2019

Πάτρα, 30 Μαρτίου 2019

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις A και B :

$$\mathrm{A}=\frac{11111}{33333}+\frac{1111}{3333}+\frac{111}{333}+\frac{15}{3}$$

$$\mathrm{B}=\left(0,33\cdot 10^3-0,03\cdot 10^4\right)\cdot\left[\left(2,5\right)^2-\left(0,5\right)^2\right]\cdot 10+0,213\cdot 10^3$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=9+27\cdot\left(\frac{673}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\right)^3$$

Προτεινόμενη Λύση

α) Για την παράσταση A έχουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{11111}{33333}+\frac{1111}{3333}+\frac{111}{333}+\frac{15}{3}=\frac{11111\cdot 1}{11111\cdot 3}+\frac{1111\cdot 1}{1111\cdot 3}+\frac{111\cdot 1}{111\cdot 3}+\frac{3\cdot 5}{3}=$$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+5=\frac{3}{3}+5=1+5=6$. Άρα $\mathrm{A}=6$.

Για την παράσταση B έχουμε:

$$\mathrm{B}=\left(0,33\cdot 10^3-0,03\cdot 10^4\right)\cdot\left[\left(2,5\right)^2-\left(0,5\right)^2\right]\cdot 10+0,213\cdot 10^3$$

$$=\left(0,33\cdot 1000-0,03\cdot 10000\right)\cdot\left(6,25-0,25\right)\cdot 10+0,213\cdot 1000$$

$$=\left(330-300\right)\cdot 6\cdot 10+213$$

$$=30\cdot 60+213=1800+213$$

$$=2013.$$

Άρα $\mathrm{B}=2013$.

β) Από το ερώτημα (α) για $\mathrm{A}=6$ και $\mathrm{B}=2013$ η παράσταση Γ γίνεται:

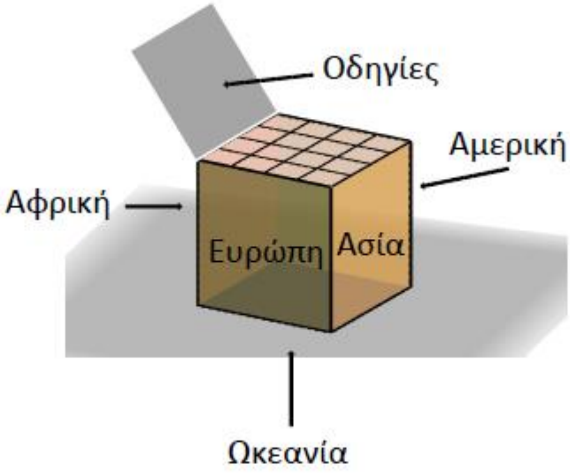
$$\Gamma=9+27\cdot\left(\frac{673}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\right)^3=9+27\cdot\left(\frac{673}{6+2013}\right)^3=9+27\cdot\left(\frac{673}{2019}\right)^3$$

$$=9+27\cdot\left(\frac{1\cdot 673}{3\cdot 673}\right)^3=9+27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=9+27\cdot\frac{1}{27}=9+1=10.$$

Άρα $\Gamma=10$.

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα παιχνίδι Γεωγραφίας αποτελείται από 64 μικρούς ξύλινους κύβους ίδιας ακμής, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι μέσα σ’ ένα κυβικό χάρτινο κουτί με τετραπλάσια από αυτούς ακμή. Στην πάνω έδρα του κουτιού είναι γραμμένες οι οδηγίες του παιχνιδιού. Σε κάθε μια από τις άλλες πέντε έδρες είναι σχεδιασμένες οι πέντε κατοικήσιμες ήπειροι της Γης με τέτοιο τρόπο ώστε στις παράπλευρες έδρες να βρίσκονται η Αφρική, η Ευρώπη, η Ασία και η Αμερική, ενώ στην έδρα απέναντι από τις οδηγίες βρίσκεται η Ωκεανία.



Με αυτή την τοποθέτηση των κύβων, να βρείτε:

α) Πόσοι είναι οι ξύλινοι κύβοι των οποίων οι έδρες ακουμπούν σε τρεις ηπείρους; Σε ποιες ηπείρους ακουμπά καθένας από τους παραπάνω κύβους;

β) Πόσοι είναι οι ξύλινοι κύβοι των οποίων οι έδρες ακουμπούν μόνο στην Ευρώπη, αλλά δεν ακουμπούν στις οδηγίες του παιχνιδιού;

γ) Πόσοι είναι οι ξύλινοι κύβοι των οποίων οι έδρες ακουμπούν σε δυο ηπείρους τουλάχιστον; Σε ποιες ηπείρους ακουμπά καθένας από τους παραπάνω κύβους;

δ) Τι ποσοστό, επί τοις εκατό, των ξύλινων κύβων δεν ακουμπούν τις έδρες τους σε καμία ήπειρο, αλλά ούτε στις οδηγίες του παιχνιδιού;

Προτεινόμενη Λύση

α) Οι ξύλινοι κύβοι των οποίων οι έδρες ακουμπούν σε τρεις ηπείρους είναι τέσσερις (4) και βρίσκονται στις κάτω γωνίες του κουτιού.
Ο πρώτος ακουμπά σε Ευρώπη, Ασία, Ωκεανία, ο δεύτερος σε Ασία, Αμερική, Ωκεανία, ο τρίτος σε Αμερική, Αφρική, Ωκεανία και ο τέταρτος σε Αφρική, Ευρώπη, Ωκεανία.

β) Οι ξύλινοι κύβοι των οποίων οι έδρες ακουμπούν μόνο στην Ευρώπη και δεν ακουμπούν στις οδηγίες του παιχνιδιού είναι τέσσερις (4) και βρίσκονται στο κέντρο της έδρας της Ευρώπης. Στην Ευρώπη ανήκουν 16 κύβοι εκ των οποίων οι 12 περιμετρικοί ακουμπούν είτε στην Ωκεανία, είτε στην Ασία, είτε στην Αφρική, είτε στις οδηγίες του κουτιού.

γ) Οι ξύλινοι κύβοι των οποίων οι έδρες ακουμπούν σε δύο ηπείρους τουλάχιστον, είναι 24. Οι κύβοι αυτοί αποτελούνται από τους 12 κύβους που βρίσκονται στην περίμετρο της έδρας της Ωκεανίας στη βάση του κουτιού και από άλλους 12 κύβους που βρίσκονται στις 4 κατακόρυφες ακμές (3 σε κάθε ακμή) του κουτιού. Κάθε κύβος από αυτούς που βρίσκονται σε αυτές τις 4 «κολώνες» , εκτός από τους κύβους της βάσης, ακουμπά σε δύο ηπείρους ($4\cdot 3=12$ κύβοι), κάθε γωνιακός κύβος στη βάση του κουτιού ακουμπά σε τρεις ηπείρους (4 κύβοι) και οι υπόλοιποι κύβοι στην περίμετρο της βάσης, ακουμπούν στην Ωκεανία και σε μία ακόμα ήπειρο (8 κύβοι). Συνολικά λοιπόν έχουμε: $4\cdot 3+4+8=24$ κύβους με έδρες που ακουμπούν σε δύο τουλάχιστον ηπείρους.

δ) Οι ξύλινοι κύβοι που δεν ακουμπούν σε καμία ήπειρο είναι 8. Οι κύβοι αυτοί δεν είναι ορατοί ακόμα κι αν υποθέταμε ότι το χάρτινο κουτί είχε και τις 6 έδρες του διαφανείς. Είναι οι εσωτερικοί κύβοι του κουτιού.
Το σύνολο των κύβων είναι 64, συνεπώς το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{8}{64}\cdot 100 = 12{,}5\%.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρείτε τους πρώτους φυσικούς ν για τους οποίους:

$$\frac{1}{6} < \frac{\nu}{15} < \frac{4}{5}$$

Προτεινόμενη Λύση

Επειδή το $\text{ΕΚΠ}(6,15,5)=30$ η σχέση $\frac{1}{6} < \frac{\nu}{15} < \frac{4}{5}$, είναι ισοδύναμη με την $\frac{5}{30} < \frac{2\nu}{30} < \frac{24}{30}$ οπότε ψάχνουμε τους φυσικούς αριθμούς ν που

είναι πρώτοι και ισχύει: $5<2\nu<24$.

Είναι φανερό ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Από τους παραπάνω αριθμούς, πρώτοι, είναι οι: 3, 5, 7 και 11.

Συνεπώς, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 3, 5, 7 και 11.

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις φίλοι ψαράδες, ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιώργος, ετοιμάζουν ένα γεύμα με τα ψάρια που περίσσεψαν στα καΐκια τους.

Ο Ανδρέας συμμετέχει στο γεύμα με 7 ψάρια, ο Βασίλης με 6 και ο Γιώργος με 5.

Ένας Ιταλός τουρίστας προτείνει στην παρέα να γευματίσει μαζί τους πληρώνοντας το ποσό που αναλογεί στο φαγητό του.

Οι τρεις φίλοι συμφωνούν και χωρίζουν τα ψάρια τους σε τέσσερις ίσες μερίδες, μία για τον καθένα.

Μετά το φαγητό ο Ιταλός πληρώνει την μερίδα του και φεύγει.

Υποθέτουμε ότι όλα τα ψάρια είχαν την ίδια αξία.

Γνωρίζουμε επίσης ότι ο Βασίλης πήρε 6 ευρώ από τα χρήματα του Ιταλού.

Να βρείτε πόσα από τα χρήματα του Ιταλού πρέπει να πάρει ο Γιώργος.

Προτεινόμενη Λύση

Αφού οι τρεις φίλοι χώρισαν τα 18 ψάρια τους σε τέσσερις ίσες μερίδες, η κάθε μερίδα θα αποτελείται από 4 ψάρια και μισό ψάρι ακόμα.

Ο Γιώργος συμμετέχει στο γεύμα με 5 ψάρια, οπότε αφού η μερίδα του έχει 4,5 ψάρια, το μισό ψάρι που του λείπει προσφέρεται για το σχηματισμό της μερίδας του Ιταλού. Αρκεί λοιπόν να βρούμε πόσο κοστίζει το μισό ψάρι.

Ο Βασίλης, που συμμετέχει στο γεύμα με 6 ψάρια, προσφέρει 1,5 ψάρι για το σχηματισμό της μερίδας του Ιταλού αφού τα υπόλοιπα 4,5 αποτελούν τη δική του μερίδα. Για το 1,5 ψάρι ο Βασίλης παίρνει από τα χρήματα του Ιταλού 6 ευρώ, άρα το μισό ψάρι κάνει $6:3 = 2$ ευρώ.

Άρα ο Γιώργος, για το μισό ψάρι που πρόσφερε στον Ιταλό πρέπει να πάρει 2 ευρώ από τα χρήματα που άφησε για να πληρώσει το φαγητό του.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Ο Ιππίας ο Ηλείος ήταν σοφιστής των χρόνων του Σωκράτη, σύγχρονος του Πρωταγόρα (5ος π.Χ. αι.). Δίδαξε στην Αθήνα. Έργα του, "Τρωικός λόγος", "Ολυμπιονικών αναγραφή" και "Εθνών ονομασίες".

Ο Πρόκλος αναφέρει στα "Σχόλια στο 1ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη" ότι ο Ιππίας ασχολήθηκε με τη Γεωμετρία και δοξάστηκε από αυτή.

Στον Ιππία αποδίδεται η λύση της διαίρεσης μιας γωνίας σε αυθαίρετο αριθμό ίσων μεταξύ τους γωνιών.

Το γενικό αυτό πρόβλημα έχει τη ρίζα του σε ένα πιο συγκεκριμένο, αυτό της τριχοτόμησης μιας γωνίας.

Η διχοτόμηση μιας γωνίας είχε στην αρχαιότητα γνωστή γεωμετρική λύση με γνώμονα και διαβήτη, όχι όμως και η τριχοτόμηση.

Ο Ιππίας έδειξε πως το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη χρήση μιας καμπύλης γραμμής, της επονομαζόμενης τετραγωνίζουσας που φέρει το όνομα του.

Μέσω της τετραγωνίζουσας, μπορεί να τετραγωνίσει κανείς και τον κύκλο!