

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΧΑΪΑΣ

Διαγωνισμός Α Γυμνασίου «Ο Ιππίας»

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Δίδονται οι φυσικοί αριθμοί 24, 42, 54. Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός n που είναι περιττός και πρώτος, και ο οποίος διαιρεί το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=2n^6+186n+2$, για την τιμή του n που έχετε βρει από το ερώτημα (A).

Λύση

A) $24=2^3 \cdot 3$, $42=2 \cdot 3 \cdot 7$, $54=2 \cdot 3^3$, άρα $\text{ΜΚΔ}(24,42,54)=6$. Οι διαιρέτες του 6 είναι $\Delta(6)=1,2,3,6$ άρα $n=3$.

B) Για $n=3$ θα έχουμε: $A=2 \cdot 3^6+186 \cdot 3+2=1458+558+2=2018$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Από τα κλάσματα $\frac{6}{\diamond}$, $\frac{12}{\diamond}$ έχουν χαθεί οι παρονομαστές. Μπορείτε να τους βρείτε αν ξέρετε ότι:

α) Ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι μονοψήφιος

και

β) Τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα

και

γ) Το πρώτο κλάσμα είναι ανάγωγο και μικρότερο της μονάδας.

Λύση

Για το πρώτο κλάσμα ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 διότι το κλάσμα δεν θα είναι μικρότερο της μονάδας. Το 7 μπορεί να είναι παρονομαστής, ενώ το 8 και το 9 δεν μπορεί να είναι παρονομαστές διότι το κλάσμα δεν θα είναι ανάγωγο. Άρα το πρώτο κλάσμα θα είναι το

$$\frac{6}{7}$$

Επειδή τα κλάσματα είναι ισοδύναμα το δεύτερο κλάσμα θα είναι το $\frac{12}{14}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Α) Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$1) \quad x + \frac{3x}{2} = \frac{75}{6}$$

$$2) \quad \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{x} + 1} = 6$$

$$3) \quad \frac{x-3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{-6}{(6x+3)(2x-1)}$$

Β) Δίδονται ο αριθμοί 0, 1, 2, και 5. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0, 1, 2, 5 μια φορά το καθένα, γράψτε όλους τους δυνατούς τριψήφιους αριθμούς που υπάρχουν.

Γ) Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς διαιρούνται διά 4.

Λύση

$$Α) \quad 1) \quad 6x + 9x = 75 \Leftrightarrow 15x = 75 \Leftrightarrow x = 5.$$

$$2) \quad \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{x} + 1} = 6 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4+x}{x}} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{4+x}{x}} = 6 \Leftrightarrow \frac{2(4+x)}{x} = 6 \Leftrightarrow 8 + 2x = 6x \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

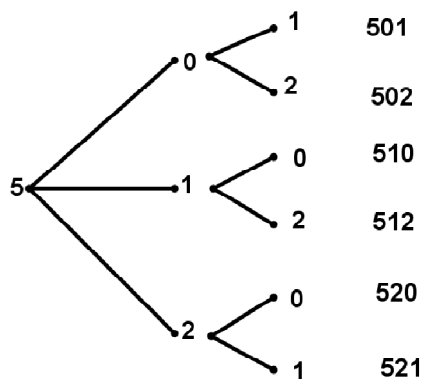
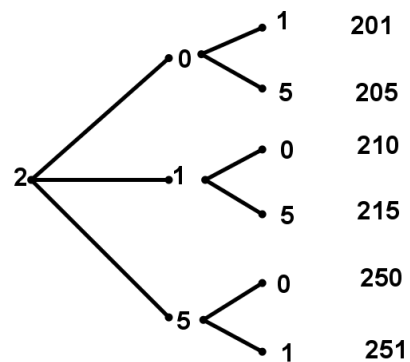
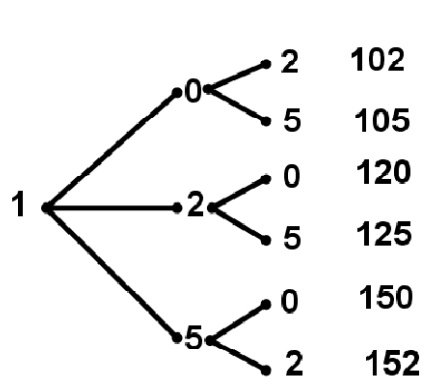
$$3) \quad \frac{x-3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{-6}{(6x+3)(2x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{-6}{3(2x+1)(2x-1)} \Leftrightarrow x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 1.$$

B) Αν το πρώτο ψηφίο είναι το 1 τότε θα έχουμε τους τριψήφιους αριθμούς 102,105,120,125,150,152.

Αν το πρώτο ψηφίο είναι το 2 τότε θα έχουμε τους τριψήφιους αριθμούς 201,205,210,215,250,251.

Αν το πρώτο ψηφίο είναι το 5 τότε θα έχουμε τους τριψήφιους αριθμούς 501,502,510,512,520,521.



Γ) Για να διαιρείται ένας αριθμός με το 4 αρκεί τα δύο τελευταία του ψηφία να διαιρούνται με το 4. Από τούς παραπάνω 18 αριθμούς αυτοί που διαιρούνται με το 4 είναι οι: 120, 152, 512, 520.

ΘΕΜΑ 4^ο

Ονοματίστε με ένα γράμμα κάθε κουκίδα στο διπλανό σχήμα. Επιλέξτε τώρα κουκίδες τέτοιες ώστε αν τις ενώσουμε με ευθύγραμμα τμήματα να σχηματίζεται τετράγωνο με κορυφές τις κουκίδες.

Γράψτε τα ονόματα όλων των τετραγώνων που μπορούν να σχεδιαστούν με αυτόν τον τρόπο.

Λύση

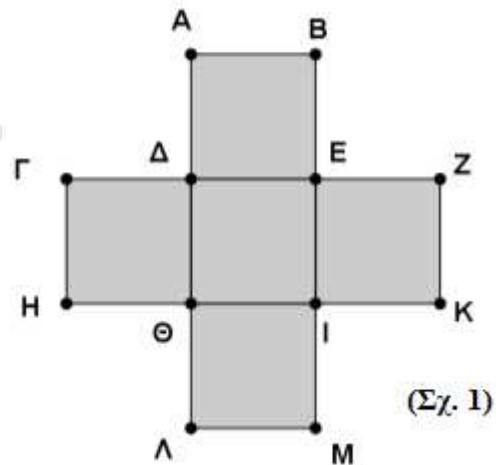
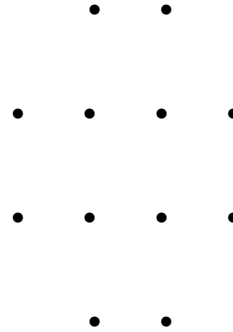
1^η περίπτωση

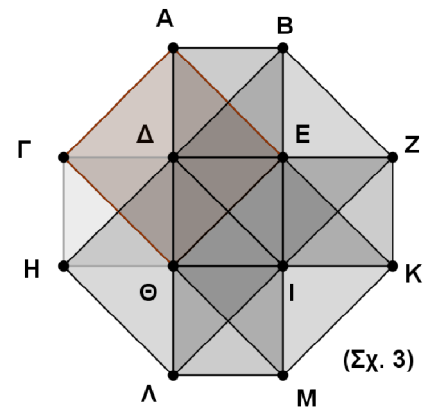
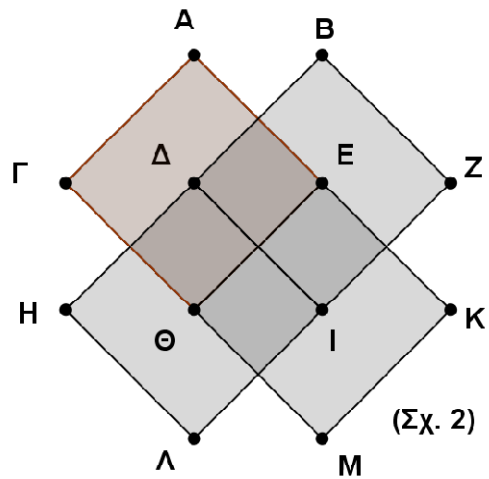
Δημιουργούνται 5 τετράγωνα πλευράς 1 όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

2^η περίπτωση

Δημιουργούνται 4 τετράγωνα πλευράς $\sqrt{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

Στο σχήμα 3 βλέπουμε και τις δύο περιπτώσεις.





ΘΕΜΑ 5^ο

Δύο εργαζόμενοι, ένας νέος και ένας μεσήλικας, περπατούν με σταθερό βήμα, κάθε μέρα την ίδια ακριβώς απόσταση από το σπίτι μέχρι το εργοστάσιο που δουλεύουν. Ο νέος κάνει 20 λεπτά ενώ ο μεσήλικας 30 λεπτά. Αν ο μεσήλικας μια μέρα ξεκινήσει 5 λεπτά νωρίτερα, **μετά από πόση ώρα και σε ποιο σημείο της διαδρομής** θα τον συναντήσει ο νέος;

Αναμενόμενες Λύσεις

- 1) Αν ξεκινούσε 10 λεπτά αργότερα ο Νέος, που είναι το μισό του χρόνου που απαιτείται για τη διαδρομή του, ο ηλικιωμένος θα θέλει ακόμη 20 λεπτά για να τερματίσει. Σ' αυτά τα 20 λεπτά θα τερματίσει και ο Νέος. Άρα θα συναντηθούν στο τέλος της διαδρομής. Αφού στα 10 λεπτά καθυστέρησης θα τερματίσουν μαζί στο μισό χρόνο, στα 5 λεπτά, θα συναντηθούν στην μέση.
- 2) Ο Νέος ξεκίνησε 5 λεπτά αργότερα, στα 10 πρώτα λεπτά του βηματισμού του θα έχει φτάσει στο μέσον της διαδρομής αφού θέλει 20 λεπτά για να τη διανύσει όλη. Ο ηλικιωμένος θα έχει περπατήσει ήδη 5 λεπτά τη στιγμή που ξεκινά ο νέος, στα επόμενα 10 λεπτά, που ο νέος θα φτάσει έχει φτάσει στο μέσον, θα συμπληρώσει 5+10 λεπτά περπάτημα άρα και αυτός θα είναι στο μέσον της διαδρομής, αφού θέλει 30 λεπτά για όλη.
- 3) Αφού ο νέος καθυστερεί 5 λεπτά θα εξετάσουμε που βρίσκεται καθένας στο τέλος κάθε πεντάλεπτου. Ο ηλ/νος θέλει 6 πεντάλεπτα ενώ ο νέος μόνο 4.

Ο ηλ/νος σε κάθε πεντάλεπτο περπατά τα $\frac{5}{30} = \frac{1}{6} \tau$

Ο ηλ/νος στο 1^ο 5-λεπτο βρίσκεται στο $\frac{1}{6}$ της διαδρομής

στο 2^ο 5-λεπτο βρίσκεται στο $2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

στο 3^ο 5-λεπτο στο $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ δηλαδή στη μέση

στο 4^ο 5-λεπτο στο $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

στο 5^ο 5-λεπτο στο $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

στο 6^ο 5-λεπτο στο $6 \times \frac{1}{6} = 1$ δηλαδή στο τέρμα.

Ο νέος σε κάθε 5-λεπτο περπατά το $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ της διαδρομής.

στο 1^ο 5-λεπτο 0, δηλαδή βρίσκεται στην αρχή

στο 2^ο 5-λεπτο στο $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ της διαδρομής.

στο 3^ο 5-λεπτο στο $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ της διαδρομής, αλλά
στο 3^ο πεντάλεπτο και ο ηλ/νος βρίσκεται στο μέσον.

Άρα θα συναντηθούν στην μέση.